Р. Б. ЯГУБОВ

ВСЕ ЗАДАНИЯ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
ОСНОВНАЯ ВОЛНА
29 мая 2019

С ОТВЕТАМИ
И РЕШЕНИЯМИ

+ВИДЕОРАЗБОРЫ

СОДЕРЖАНИЕ

О ЭКЗАМЕНЕ ..... **- 3 -**

УСЛОВИЯ ..... **- 4 -**

Задание 1. Простейшие текстовые задачи ..... **- 4 -**

Задание 2. Чтение графиков и диаграмм ..... **- 5 -**

Задание 3. Квадратная решётка ..... **- 6 -**

Задание 4. Теория вероятностей ..... **- 7 -**

Задание 5. Простейшие уравнения ..... **- 8 -**

Задание 6. Простейшая планиметрия ..... **- 9 -**

Задание 7. Производная и первообразная ..... **- 10 -**

Задание 8. Простейшая стереометрия ..... **- 11 -**

Задание 9. Вычисления и преобразования ..... **- 12 -**

Задание 10. Задачи с прикладным содержанием ..... **- 13 -**

Задание 11. Текстовые задачи ..... **- 14 -**

Задание 12. Исследование функций ..... **- 15 -**

Задание 13. Уравнения ..... **- 16 -**

Задание 14. Стереометрическая задача ..... **- 20 -**

Задание 15. Неравенства ..... **- 23 -**

Задание 16. Планиметрическая задача ..... **- 24 -**

Задание 17. Финансовая математика ..... **- 25 -**

Задание 18. Задача с параметром ..... **- 27 -**

Задание 19. Числа и их свойства ..... **- 28 -**

РЕШЕНИЯ ..... **- 30 -**

Задания 1-12 ..... **- 30 -**

Задание 13 ..... **- 39 -**

Задание 14 ..... **- 57 -**

Задание 15 ..... **- 80 -**

Задание 16 ..... **- 94 -**

Задание 17 ..... **- 100 -**

Задание 18 ..... **- 109 -**

Задание 19 ..... **- 121 -**

ВИДЕОРАЗБОРЫ ЗАДАНИЙ ..... **- 127 -**

СБОРНИКИ ПРОШЛЫХ ЛЕТ ..... **- 127 -**

СПАСИБО ..... **- 130 -**

ЯГУБОВ.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

О ЭКЗАМЕНЕ

Экзаменационная работа **состоит из двух частей**, включающих в себя **19 заданий**. Часть 1 содержит 8 заданий **базового уровня** сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания **повышенного уровня** сложности с кратким ответом и 7 заданий **высокого уровня** сложности с развёрнутым ответом.

Номер задания	1-12	13-15	16-17	18-19	Всего
Баллы	1	2	3	4	32

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится **3 часа 55 минут**.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1, выданный на экзамене!

При выполнении работы Вы можете воспользоваться справочными материалами, выдаваемыми вместе с работой. **Разрешается использовать только линейку**. Запрещается использовать инструменты с нанесёнными на них справочными материалами. **Калькуляторы на экзамене не используются**.

На экзамене **при себе надо иметь документ, удостоверяющий личность** (паспорт), **пропуск и капиллярную или гелевую ручку с черными чернилами**! Разрешают брать с собой воду (в прозрачной бутылке) и еду (фрукты, шоколадку, булочки, бутерброды), но могут попросить оставить в коридоре.

Первичный балл	0	1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10
Тестовый балл	0	5	9	14	18	23	**27**	33	39	45	50
Примерная оценка	2	2	2	2	2	2	**3**	3	3	3	4

Первичный балл	11	12	**13**	14	15	16	17	18	19	20	21
Тестовый балл	56	62	**68**	70	72	74	76	78	80	82	84
Примерная оценка	4	4	**5**	5	5	5	5	5	5	5	5

Первичный балл	22	23	24	25	26	27	28	29	**30**	31	32
Тестовый балл	86	88	90	92	94	96	98	99	**100**	100	100
Примерная оценка	5	5	5	5	5	5	5	5	**5**	5	5

Почему задания из МО в начале? Мой ученик их написал на 100 баллов (32/32). В память о том, как ученик превзошёл учителя. Молодец!

Таких заданий (с подчёркиванием под буквой) скорее всего на экзамене не было!

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

УСЛОВИЯ

Задание 1. Простейшие текстовые задачи

A. [Московская область] Каждый день во время конференции расходуется 90 пакетиков чая. Конференция длится 4 дня. Чай продаётся в пачках по 25 пакетиков. Сколько пачек чая нужно купить на все дни конференции?

B. [Москва] Для ремонта квартиры требуется 37 рулонов обоев. Сколько пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 6 рулонов?

C. [Дальний Восток] На корабле плывёт 500 пассажиров и 15 членов команды. Сколько шлюпок потребуется, чтобы перевезти всех людей с корабля на берег, если в одну шлюпку помещается 80 человек.

D. В пачке 500 листов бумаги формата A4. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 4 недели?

E. Плата за телефон составляет 220 рублей в месяц. В следующем году она увеличится на 10%. Сколько придётся платить ежемесячно за телефон в следующем году?

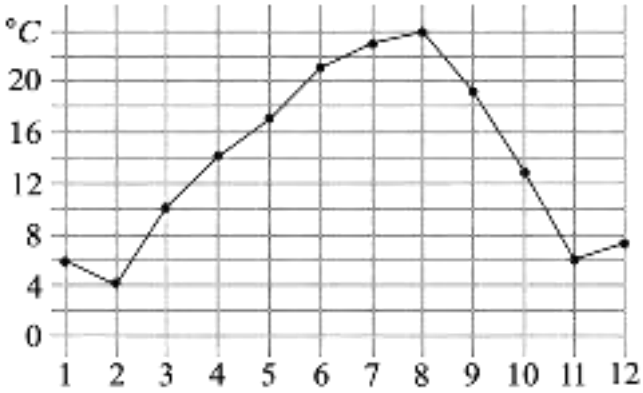
F. Шоколадка стоит 40 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 200 рублей в воскресенье?

	A	B	C	D	E	F	G	
ОТВЕТЫ	15	7	7	10	242	6		

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

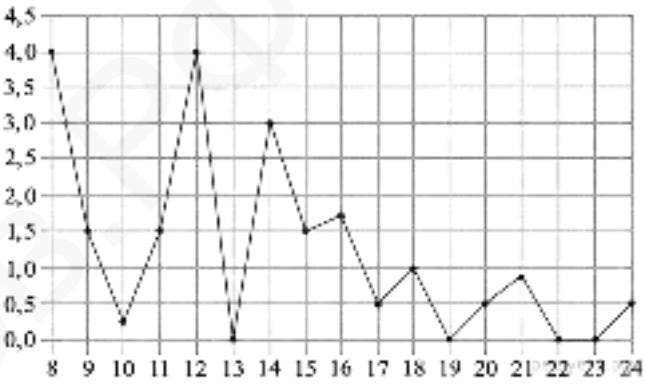
Задание 2. Чтение графиков и диаграмм

A. [Московская область] На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Реутове за каждый месяц 2018 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.



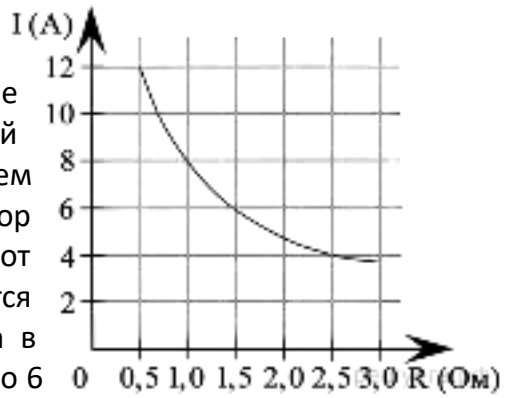
Определите по рисунку наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 2018 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.

B. [Москва] На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 8 по 24 мая 2019 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией.



Определите по рисунку, какого числа впервые выпало ровно 1,5 миллиметров осадков.

C. [Дальний Восток] Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Ток в цепи электродвигателя уменьшился с 8 до 6 ампер.



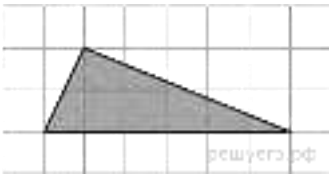
На сколько Омов при этом увеличилось сопротивление цепи?

	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	6	9	0,5				

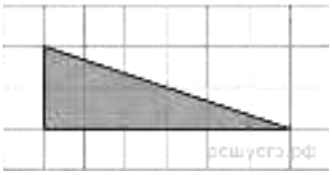
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 3. Квадратная решётка

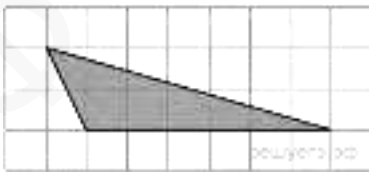
A. [Московская область] Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



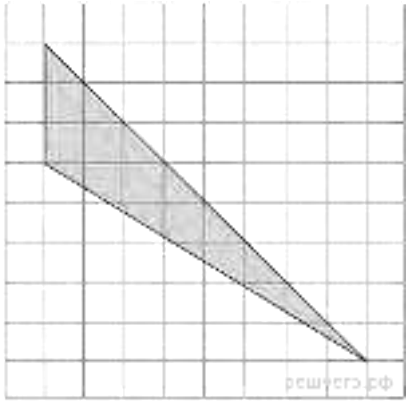
B. [Москва] Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



C. [Дальний Восток] Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



D. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	6	6	6	12			

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 4. Теория вероятностей

A. [Московская область] В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 6 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает?

B. [Москва] В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 — из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

C. [Дальний Восток] В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме «Неравенства». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Неравенства».

D. В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

E. Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	0,997	0,36	0,6	0,25	0,92		

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 5. Простейшие уравнения

Найдите решение уравнения.

A. [Московская область] $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-9} = 32.$

B. [Москва] $7^{x-4} = 49.$

C. [Дальний Восток] $3^{x-5} = \frac{1}{27}.$

D. $9^{x-1} = 81.$

E. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-9} = 81.$

F. $9^{x-5} = \frac{1}{81}.$

G. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-3} = 64.$

H. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5-x} = 27.$

I. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-6} = 25.$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
ОТВЕТЫ	4	6	2	3	7	3	1	8	4

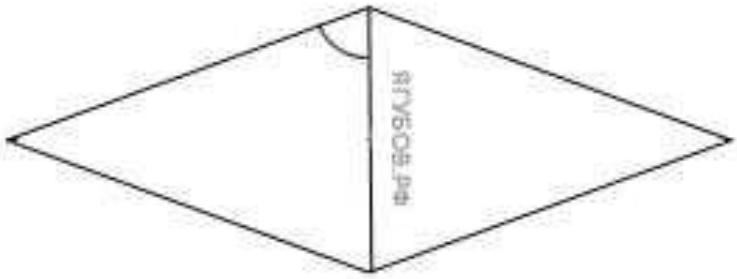
Ягубов.РФ

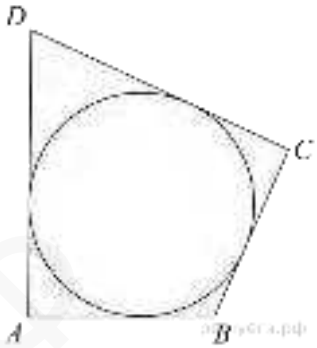
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 6. Простейшая планиметрия

A. [Московская область] В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $CD = 16$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

B. [Москва] Угол между стороной и диагональю ромба равен 54°. Найдите острый угол ромба.





C. [Дальний Восток] В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 10$, $BC = 8$, $CD = 16$. Найдите длину стороны AD.

	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	52	72	18				

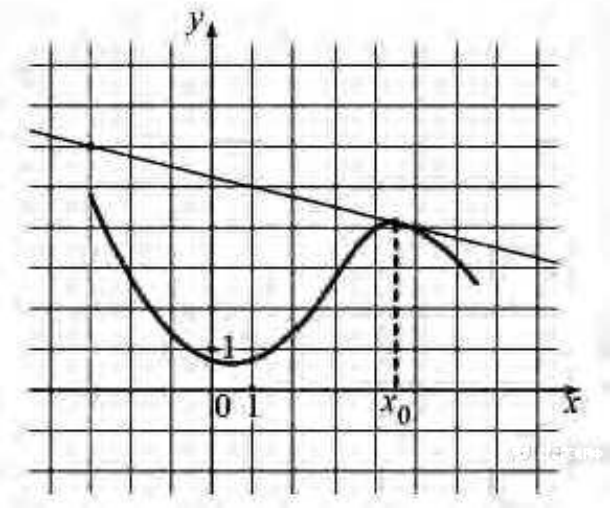
Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

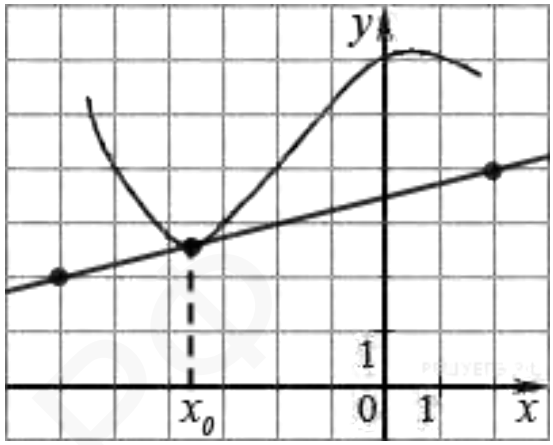
Задание 7. Производная и первообразная

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

A [Московская область]



B [Москва и Дальний Восток]



	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	−0,25	0,25					

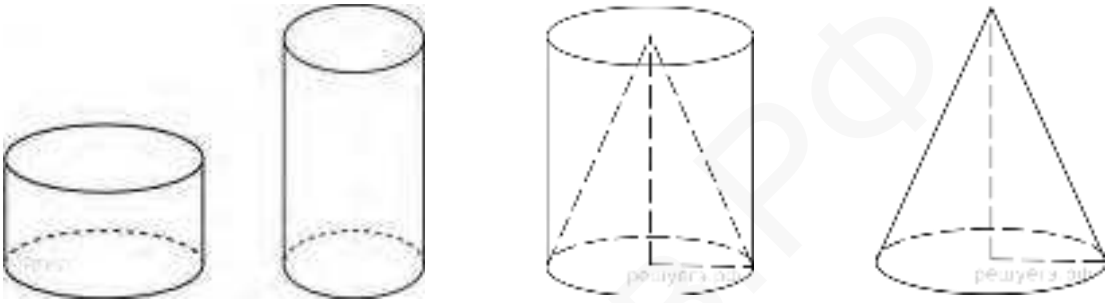
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 8. Простейшая стереометрия

A. [Московская область] Объем первого цилиндра равен 12 м^3. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания — в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

B. [Москва] Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 25. Найдите объём цилиндра.

C. [Дальний Восток] Во сколько раз изменится объём конуса, если его высота уменьшится в 12 раз, а радиус основания не изменился.



	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	9	75	12				

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 9. Вычисления и преобразования

Найдите значение выражения.

A. [Московская область] $\mathbf{9\log_{13} 13^{\frac{1}{9}}}$.

B. [Москва] $\mathbf{\log_{0{,}25} 128 - \log_{0{,}25} 2}$.

C. [Дальний Восток] $\mathbf{\frac{\log_2 49}{\log_2 7}}$.

D. $\mathbf{\log_{0{,}9} 9 - \log_{0{,}9} 10}$.

E. $\mathbf{7\log_{\sqrt{15}} 15}$.

F. $\mathbf{15\log_4 4^{\frac{1}{5}}}$.

G. $\mathbf{5\log_{\sqrt{12}} 12}$.

H. $\mathbf{8\log_{\sqrt{14}} 14}$.

I. $\mathbf{8\log_5 \sqrt[4]{5}}$.

J. $\mathbf{16\log_7 \sqrt[4]{7}}$.

K. $\mathbf{\log_{0{,}2} 50 - \log_{0{,}2} 2}$.

L. $\mathbf{\frac{\log_2 35}{\log_{32} 35}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
ОТВЕТЫ	1	-3	2	1	49	3	25	64	2	4	-2	5

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 10. Задачи с прикладным содержанием

A. [Московская область] Сила тока в цепи (в амперах) определяется напряжением в цепи и сопротивлением электроприбора по закону Ома: $\boldsymbol{I = \frac{U}{R}}$, где – напряжение в вольтах, – сопротивление электроприбора в омах. В электросеть включён предохранитель, который плавится, если сила тока превышает 40 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 вольт, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

B. [Москва] К источнику с ЭДС $\boldsymbol{\varepsilon = 130}$ В и внутренним сопротивлением $\boldsymbol{r = 1}$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $\boldsymbol{U = \frac{\varepsilon R}{R+r}}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 120 В? Ответ выразите в Ом.

C. [Дальний Восток] При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $\boldsymbol{f_0 = 150}$ Гц и определяется следующим выражением: $\boldsymbol{f = f_0 \frac{c+u}{c-v}}$, где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $\boldsymbol{u = 10}$ м/с и $\boldsymbol{v = 15}$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости с (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике будет не менее 160 Гц.

	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	5,5	12	390				

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 11. Текстовые задачи

A. [Московская область] Из городов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

B. [Москва] Из городов A и B, расстояние между которыми равно 790 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 490 км от города B. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города A. Ответ дайте в км/ч.

C. [Дальний Восток] Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 77 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 4 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

D. Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

E. Расстояние между А и В 790 км. Из А в В выехал автомобиль, через 3 часа навстречу ему выехал второй автомобиль со скоростью 75 км/ч. Они встретились на расстоянии 490 км от города А. Найти скорость (в км/ч) первого автомобиля.

	A	B	C	D	E	F	G
ОТВЕТЫ	4	100	11	16	70		

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 12. Исследование функций

Найдите точку максимума функции.

A. [Москва] $y = x^3 - 108x + 115$.

B. [Дальний Восток] $y = 7 + 15x - x\sqrt{x}$.

C. [Московская область] $y = 8 - 24x + 2x^{\frac{3}{2}}$

D. $y = 1 + 21x + 2x^{\frac{3}{2}}$

E. $y = 4 + 9x - x\sqrt{x}$.

Найдите точку минимума функции.

F. $y = x^3 - 147x + 23$.

G. $y = x^{\frac{3}{2}} - 12x + 15$.

H. $y = x\sqrt{x} - 3x + 17$.

I. $y = x\sqrt{x} - 15x + 8$.

J. $y = x\sqrt{x} + 9x - 6$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ОТВЕТЫ	-6	100	64	49	36	7	64	4	100	0

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 13. Уравнения

а) Решите уравнение.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку.

	а	б	
A	[Московская область] $4\cos^2 x + 8\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 5 = 0$	$\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$	
B	[Москва] $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$	$\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$	
C	[Дальний Восток] $\cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$	$\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$	
D	[Санкт-Петербург] $8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 9 = 0$	$\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$	
E	$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1$	$\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$	
F	$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$	$\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$	
G	$\cos 2x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$	$\left[2\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right]$	
H	$6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$	$\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$	
I	$\cos 2x + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 = 0$	$\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$	
J	[Москва] $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$	$\left[-4\pi;\ -\frac{5\pi}{2}\right]$	

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

K	$2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + 1 = 0$	$\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$	
L	$2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$	$\left(-\frac{\pi}{4};\ -\pi\right]$	
M	$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4 = 0$	$\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$	
N	$2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 4 = 0$	$\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$	
P	$\cos 2x + 0,5 = \cos^2 x$	$\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$	
O	$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4 = 0$		
Q	$\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$	$\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$	
R	$\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 = 0$		
S	$8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$	$\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$	
T	$2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$	$\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$	
U	$2\cos^2 x + 5\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 9 = 0$	$\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$	

ЯГУБОВ.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Ответы.

	а	б
A	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{10\pi}{3};\ -\frac{8\pi}{3}$
B	$\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$
C	$\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4}$
D	$-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{7\pi}{3}$
E	$-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\pm\frac{\pi}{3}+2\pi t,\quad k,t\in\mathbb{Z}$	$\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$
F	$-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{2\pi}{3}$
G	$\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad \pm\frac{3\pi}{4}+2\pi t,\quad k,t\in\mathbb{Z}$	$\frac{5\pi}{2};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4};\ \frac{7\pi}{2}$
H	$-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{3\pi}{4}$
I	$-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{7\pi}{3};\ -\frac{8\pi}{3}$
J	$\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{23\pi}{6};\ -\frac{19\pi}{6};\ -\frac{17\pi}{6}$

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

K	$-\frac{\pi}{3}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}$
L	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{4}$
M	$\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{7\pi}{6}$
N	$\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$\frac{11\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4}$
O	$\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	
P	$\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$
Q	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$\frac{7\pi}{4}$
R	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	
S	$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$-\frac{13\pi}{6}$
T	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$\frac{15\pi}{4}$
U	$\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$	$\frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 14. Стереометрическая задача

A. [Москва] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка К — делит сторону SC в отношении $1:2$ считая от вершины S, точка N — делит сторону SB в отношении $1:2$ считая от вершины S. Через точки N и K параллельно SA проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α параллельно прямой BC.	$\frac{2}{3}\sqrt{23}$	
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости, если известно, что $SA = 9, AB = 6$.		

B. [Дальний Восток] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — делит сторону AB в отношении $2:3$ считая от вершины A, точка K — делит сторону BC в отношении $2:3$ считая от вершины C. Через точки P и K параллельно SB проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является прямоугольником.	$\frac{9}{25}\sqrt{39}$	
б) Найдите расстояние от точки S до плоскости α если известно, что $SC = 5, AC = 6$.		

C. [Санкт-Петербург] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 9, а боковое ребро $SA = 6$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 2 : 7$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $2 : 7$, считая от вершины S.	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.		

D. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро $SA = 3$. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 3 : 1$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α является прямоугольником.	$\frac{3}{8}\sqrt{11}$	
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A, а основание — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.		

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

E. [Московская область] В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На рёбрах AB и SC отмечены точка K и M соответственно, причем $AK:KB = SM:MC = 1:4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1:4$, считая от вершины A. **б)** Найдите расстояние между прямыми SA и KM.	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	

F. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 4. На рёбрах AB и SC отмечены точка K и M соответственно, причем $AK:KB = SM:MC = 1:2$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA. **б)** Найдите угол между плоскостями α и SBC.	$\arccos\frac{23}{4\sqrt{55}}$	

G. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 10. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причем $DN:NC = SK:KC = 1:7$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $1:7$, считая от вершины S. **б)** Найдите расстояние между прямыми SA и KN.	$\frac{\sqrt{357}}{21}$	

H. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 7, а боковое ребро SA равно 14. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причем $DN:NC = SK:KC = 2:5$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой AS.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC. **б)** Найдите расстояние от точки B до плоскости α.	$\frac{\sqrt{210}}{3}$	

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

I. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точка K и M соответственно, причем $AK:KB = SM:MC = 5:1$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой BC.	$\frac{\sqrt{111}}{14}$	
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.		

J. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 6. Точка K делит ребро SC, причем $SK:KC = 1:2$. Плоскость α проходит через точку K и параллельна плоскости SAD.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равнобедренной трапецией.	$\frac{2}{3}\sqrt{14}$	
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка S, а основание — сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α.		

Ягубов.рф

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 15. Неравенства

Решите неравенство.

	УСЛОВИЕ	ОТВЕТ	
A	[Московская область, Санкт-Петербург] $\log_2(14-14x) \geq \log_2(x^2-5x+4)+\log_2(x+5)$	$(-5;-3]$	
B	[Москва] $\log_4(6-6x) < \log_4(x^2-5x+4)+\log_4(x+3)$	$(-2;1)$	
C	[Дальний Восток] $\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$	$(-2;-1)$	
D	$\log_{\frac{1}{3}}\big((4-x)(x^2+29)\big) \leq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+24)+\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$	$[1;4)$	
E	$\log_6(108-36x) > \log_6(x^2-11x+24)+\log_6(x+4)$	$(-4;3)\setminus\{2\}$	
F	$\log_{0.6}(18-18x) \leq \log_{0.6}(x^2-6x+5)+\log_{0.6}(x+4)$	$(-4;1]$	
G	$\log_{0.5}(10-10x) \leq \log_{0.5}(x^2-5x+4)+\log_{0.5}(x+3)$	$(-3;-1]$	
H	$\log_2(4-4x) \geq \log_2(x^2-4x+3)+\log_2(x+2)$	$(-2;-1]$	
I	$\log_6(21-7x) \geq \log_6(x^2-8x+15)+\log_6(x+3)$	$(-3;-2]$	
J	$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+3)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$	$(-2;3-\sqrt{6})$	
K	$\log_4(6-6x) \geq \log_4(x^2-5x+4)-\log_4(x+3)$	$[-2;1)$	
L	$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+8)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$	$(-2;2)\setminus\{1\}$	
M	$\log_5(25-25x) > \log_5(x^2-4x+3)+\log_5(x+7)$	$(-7;1)\setminus\{-2\}$	
N	$\log_{0,1}(6-6x) \leq \log_{0,1}(x^2-4x+3)+\log_{0,1}(x+4)$	$(-4;-3]$	
O	$\log_{0,3}(12-6x) \leq \log_{0,3}(x^2-6x+8)+\log_{0,3}(x+3)$	$(-3;-2]$	

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 16. Планиметрическая задача

A. [Санкт-Петербург] Точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.	**$16\sqrt{3}$**	
б) Найдите площадь треугольника APC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 8, $\angle ABC = 60^\circ$.		

B. [Дальний Восток] Точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $OP = AP$.	**27**	
б) Найдите расстояние от точки P до прямой AC, если $\angle ABC = 120^\circ$, а радиус описанной окружности равен 18.		

C. [Москва] Около остроугольного $\triangle ABC$ с различными сторонами описали окружность с диаметром BN. Высота BH пересекает эту окружность в точке K. Известно, что $\angle BAC = 35^\circ, \angle ACB = 65^\circ$.

а) Докажите, что $AN = CK$.	**12**	
б) Найдите KN, если радиус окружности равен 12.		

D. [Московская область] В остроугольном $\triangle ABC$ угол A равен 60°. Высоты BN и CM пересекаются в точке H. Точка O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

а) Докажите, что $AH = AO$.	**9**	
б) Найдите площадь $\triangle AHO$, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.		

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 17. Финансовая математика

A. [Санкт-Петербург] В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наименьший годовой платёж составит 3,85 млн рублей?
(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

17.5 млн рублей

B. [Москва] В июле планируется взять кредит в банке на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
Найдите r, если известно, что за весь период выплатили на 15% больше, чем взяли в кредит.

1,875 %

C. [Дальний Восток] В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
Найдите r, если известно, что наибольший платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

25 %

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

D. 15-го января планируется взять кредит на банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долг;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 1 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

800 тыс. рублей

E. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?
(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

80.5 млн рублей

F. [Московская область] В июле планируется взять кредит в банке на сумму 7 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
На сколько лет планируется взять кредит, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 17,5 млн рублей?

14 лет

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 18. Задача с параметром

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных решения.

	УСЛОВИЕ	ОТВЕТ	
A	[Санкт-Петербург] $\dfrac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2}=0$	$(-\infty;4)\setminus\{-5;0;3\}$	
B	[Москва] $\dfrac{\lvert 4x\rvert -x-3-a}{x^2-x-a}=0$	$(-3;+\infty)\setminus\{0;2;6;12\}$	
C	[Дальний Восток] $\dfrac{x^2-2x+a^2-4a}{x^2-a}=0$	$\left(2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\right)\setminus\{0;1;4\}$	
D	[Московская область] $\dfrac{2a-x^2+3x}{x-a^2}=0$	$\left(-\dfrac{9}{8};+\infty\right)\setminus\{-1;0;2\}$	
E	$\dfrac{x^2+2x-a}{x^2-2x+a^2-8a}=0$	$(-1;+\infty)\setminus\{0;3;8\}$	
F	$\dfrac{\lvert 4x-15\rvert +2a-15}{x^2-10x+a^2}=0$	$(-\infty;7,5)\setminus\{-3;0;4;5\}$	
G	$\dfrac{x^2-6x+a^2+2a}{2x^2-ax-a^2}=0$	$\left(-1-\sqrt{10};\sqrt{10}-1\right)\setminus\{-4;0;2\}$	
H	[Урал] $\dfrac{x^2-6x+a^2-4a}{x^2-a^2}=0$	$\left(2-\sqrt{13};2+\sqrt{13}\right)\setminus\{-1;0;5\}$	
I	$\dfrac{x^2-2x+a^2-6a}{x^2+x-a}=0$	$\left(3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right)\setminus\{0;2;6\}$	

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 19. Числа и их свойства

A. [Санкт-Петербург, Московская область] В ящике лежат 65 овоща, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 982 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1024 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?	**нет**	
б) Могло ли в ящике оказаться ровно 13 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?	**нет**	
в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?	**387**	

B. [Москва] Есть синие и красные карточки. Всего карточек 50 штук. На каждой написаны натуральные числа, среднее арифметическое которых равно 16. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в 2 раза, после чего среднее арифметическое стало равно 31,2.

а) Может ли быть 10 синих карточек?	**да**	
б) Может ли быть 10 красных карточек?	**нет**	
в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?	**35**	

C. [Дальний Восток] Дана последовательность из 100 натуральных чисел, каждое из которых, начиная со второго, либо в два раза больше предыдущего, либо на 98 меньше.

а) Может ли последовательность состоять из 5 различных чисел?	**да**	
б) Какое может быть a_1 если $a_{100} = 75$?	**9777**	
в) Найдите наименьшее значение наибольшего члена последовательности.	**112**	

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

D. В ящике 95 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы. В среднем масса всех фруктов равна 100 грамм. В среднем масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100, равна 73 грамма. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 грамм, равна 115 грамм.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 грамм и фруктов массой больше 100 грамм?	**нет**
б) Могло ли в ящике оказаться меньше 10 фруктов, масса каждого из которых равна 100 грамм?	**нет**
в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?	**857**

E. В течении n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

а) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 7. Может ли n быть больше 6?	**нет**
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 2,5?	**да**
в) Известно, что $n = 6$. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?	**33**

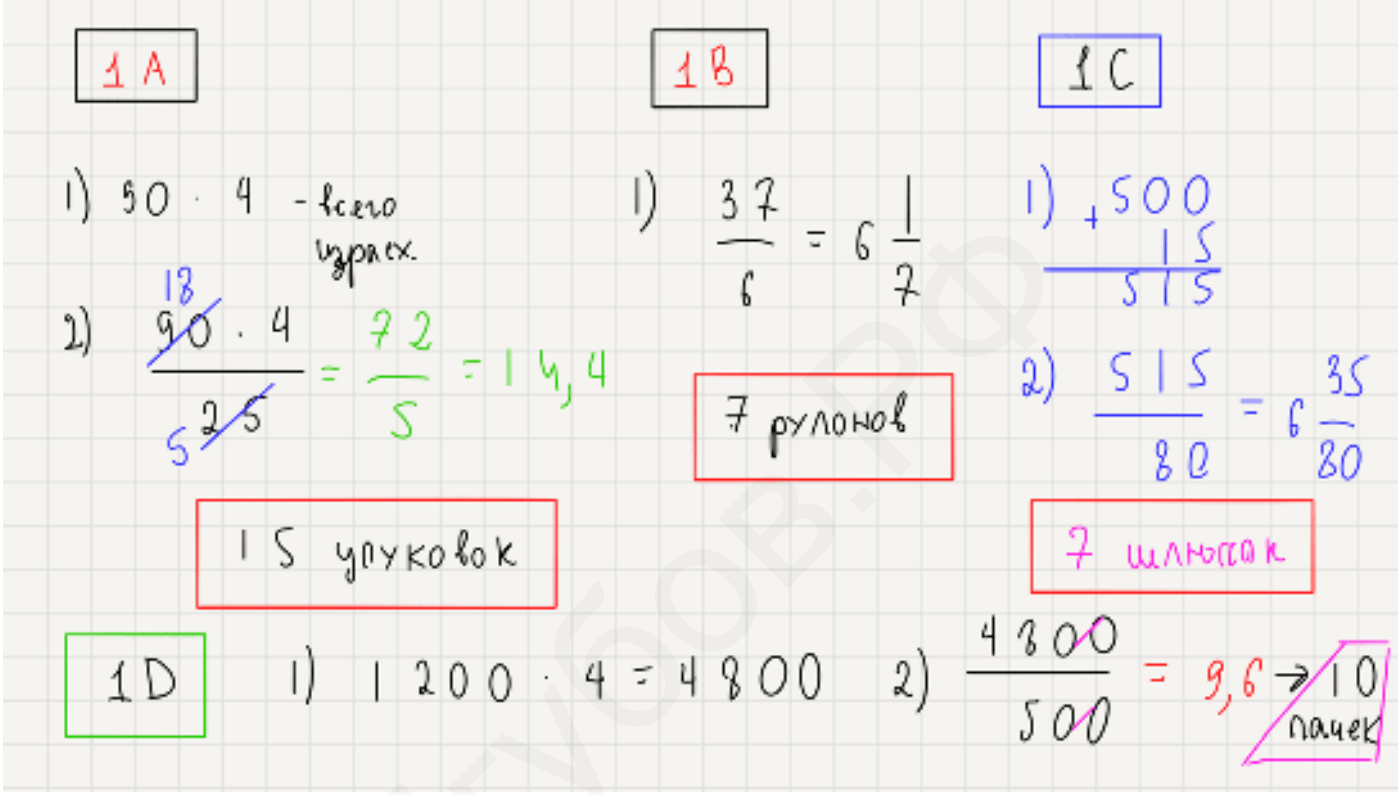
Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

РЕШЕНИЯ

Задания 1-12

Задания 1 (A-D) от Романа Борисовича Ягубова



Задания 1 (E, F) от Решу ЕГЭ

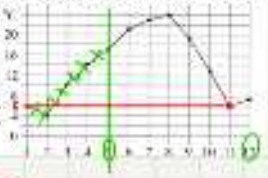
1E. Увеличение платы за телефон составит 220 · 0,1 = 22 руб.
Значит, в следующем году ежемесячная плата составит 220 + 22 = 242 руб.

1F. $\frac{200}{40} = 5$
Значит, можно будет купить 5 шоколадок. Ещё 1 будет дана в подарок. Всего можно будет получить 6 шоколадок.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

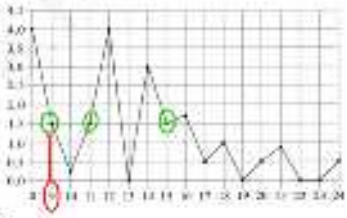
Задания 2 от Романа Борисовича Ягубова

A. [Московская область] На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Реутове за каждый месяц 2018 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по октябрь 2018 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



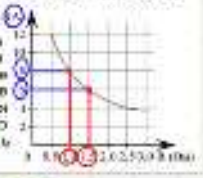
Ответ: 6

B. [Москва] На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Москве с 8 по 24 мая 2019 года. По горизонтали указываются число месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало равно 1,5 миллиметров осадков.



Ответ: 9

C. [Дальний Восток] Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Так в цепи электродвигателя уменьшился с 3 до 2 ампер. На сколько Ом при этом увеличилось сопротивление цепи?



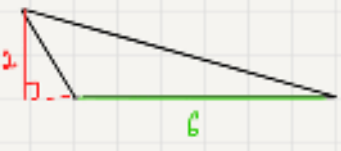
1,5 - 1,0 = 0,5

Задания 3 от Романа Борисовича Ягубова

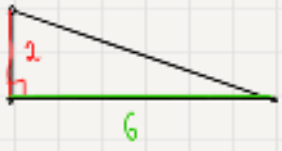
Задание 3

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

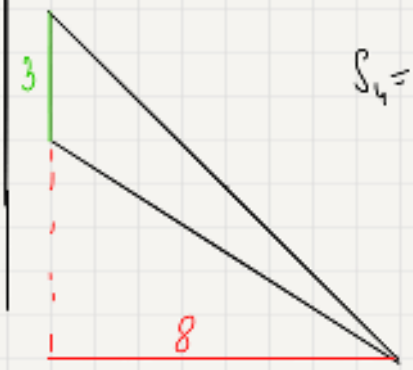
$S_1 = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$



$S_3 = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$



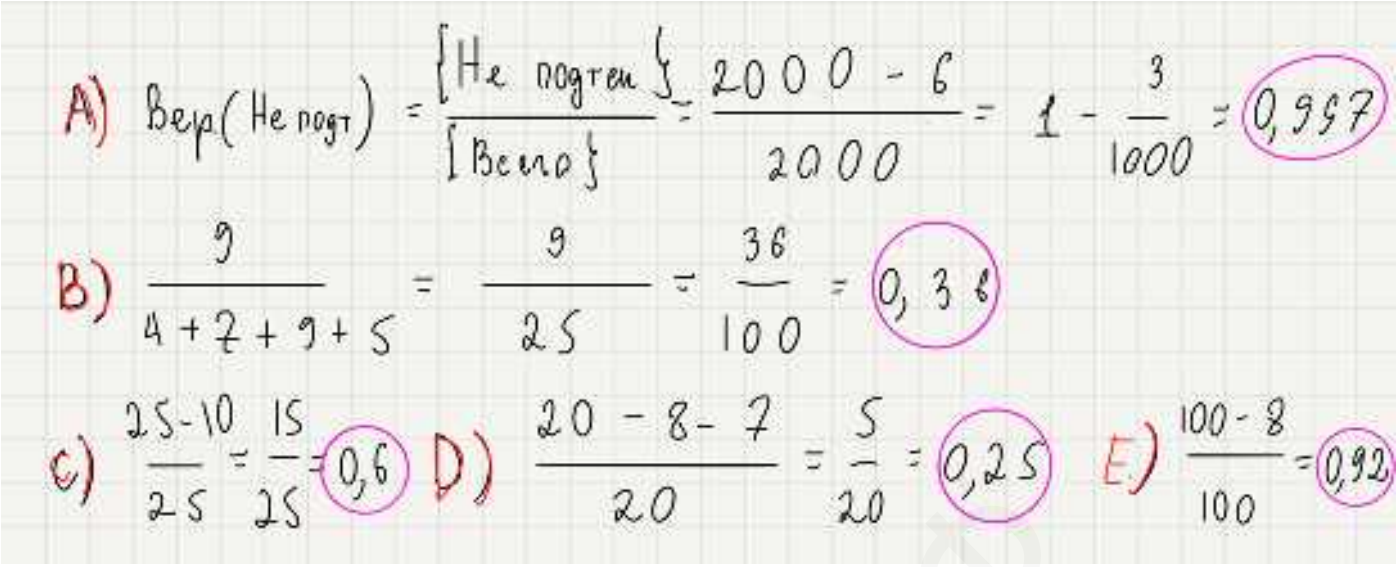
$S_2 = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$



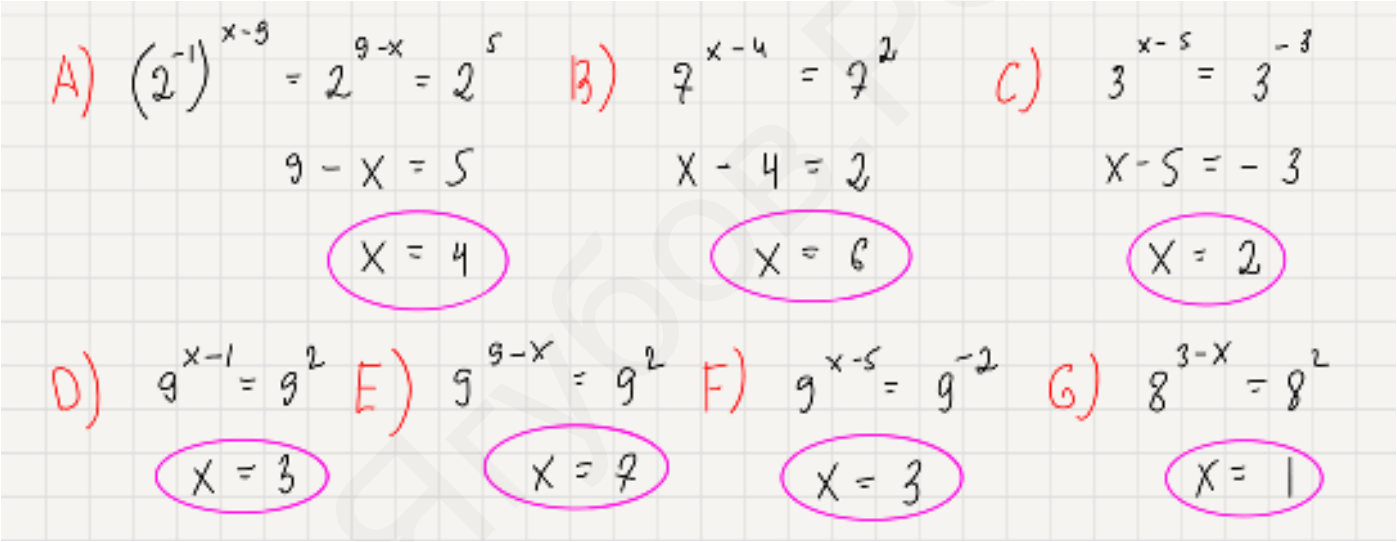
$S_4 = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задания 4 от Романа Борисовича Ягубова



Задания 5 от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задания 6 от Романа Борисовича Ягубова

A) $\omega \to ABCD \Rightarrow$

1) $AB + CD = BC + AD$

2) $P = AB + CD + (BC + AD) =$

$= 2(AB + CD) =$

$= 2(10 + 16) =$

$= 52$

B)

$180 - 2 \times 54 = 72$

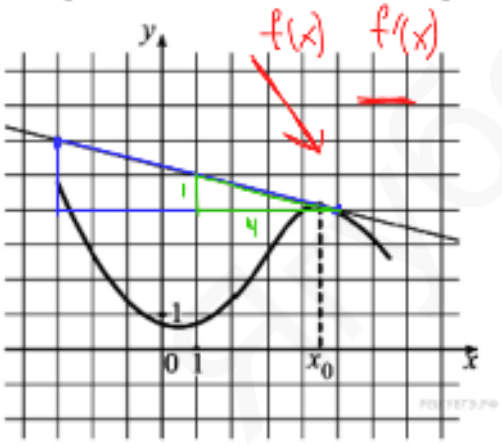
C) $\omega \to ABCD \Rightarrow AB + CD = BC + AD$

$\Rightarrow AD = AB + CD - BC =$

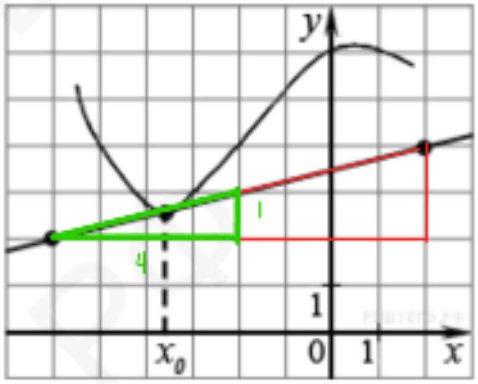
$= 10 + 16 - 8 = 18$

Задания 7 от Романа Борисовича Ягубова

A [Московская область]



B [Москва и Дальний Восток]

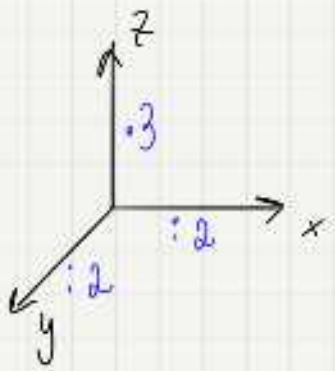


$y'(x_0) = k(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{4} = -0,25$ $y'(x_0) = \frac{1}{4} = 0,25$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задания 8 от Романа Борисовича Ягубова

A)



12

$\frac{12 \cdot 3}{2 \cdot 2} = 9$ (ед³)

B) $V_ц = \pi R^2 h = X$

$V_к = \frac{1}{3} \pi R^2 h = 25$

$X = \frac{25\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 75$

C) $V_к = \frac{1}{3} \pi R^2 h = X$

$V_{нк} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{h}{12} = ?$

$k = \frac{V_к}{V_{нк}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \pi}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12}} = 12$ (раз)

Задания 9 от Романа Борисовича Ягубова

Задание 9

A) $9 \log_{13} 13 = 9 \cdot \frac{1}{9} \cdot \log_{13} 13 = 1 \cdot 1 = 1$ ($\frac{1}{9}$ (степ.))

B) $\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{128}{2}\right) = \log_{2^{-2}} 2^6 = \frac{6}{-2} \cdot \log_2 2 = -3$

C) $\log_7 49 = 2$

D) $\log_{0,3} 0,9 = 1$

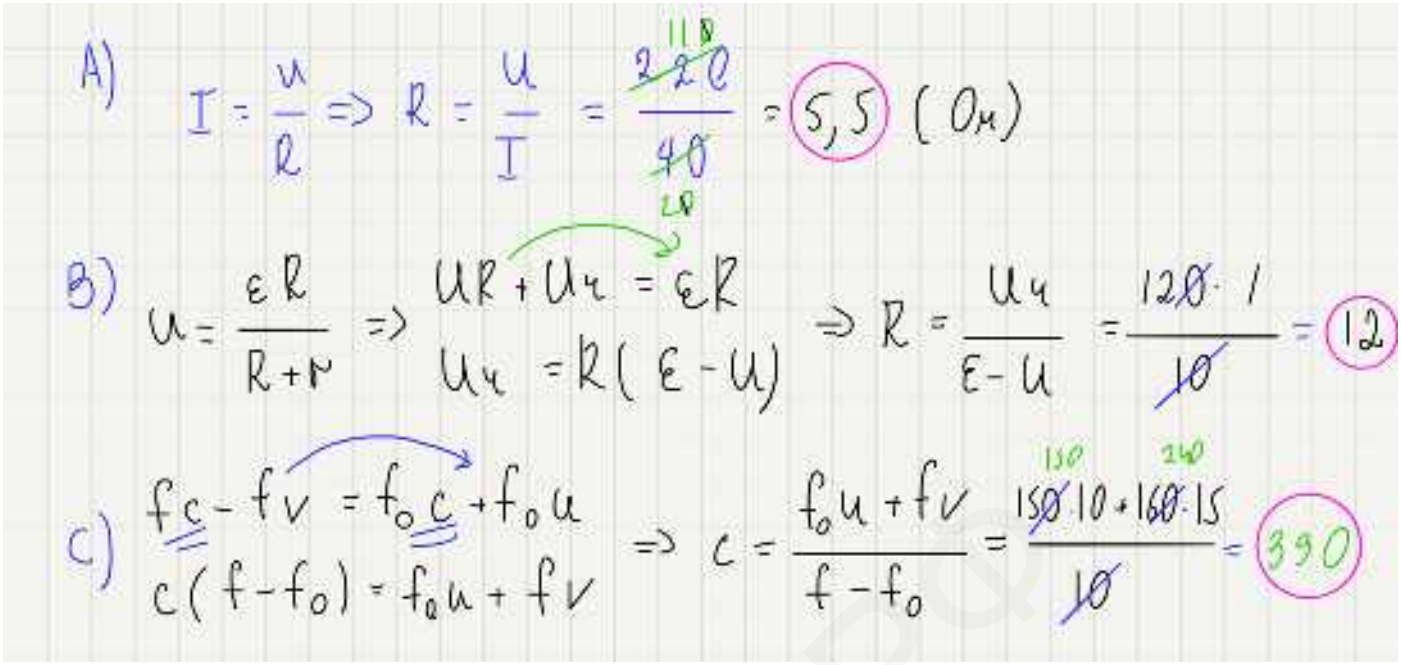
E) $7 \cdot \frac{1}{1/7} \log_{15} 15 = 7 \cdot 7 = 49$

F) $\frac{15}{5} \log_4 4 = 3 \cdot 1 = 3$

G) $5 \cdot \frac{1}{1/5} \log_{12} 12 = 25$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

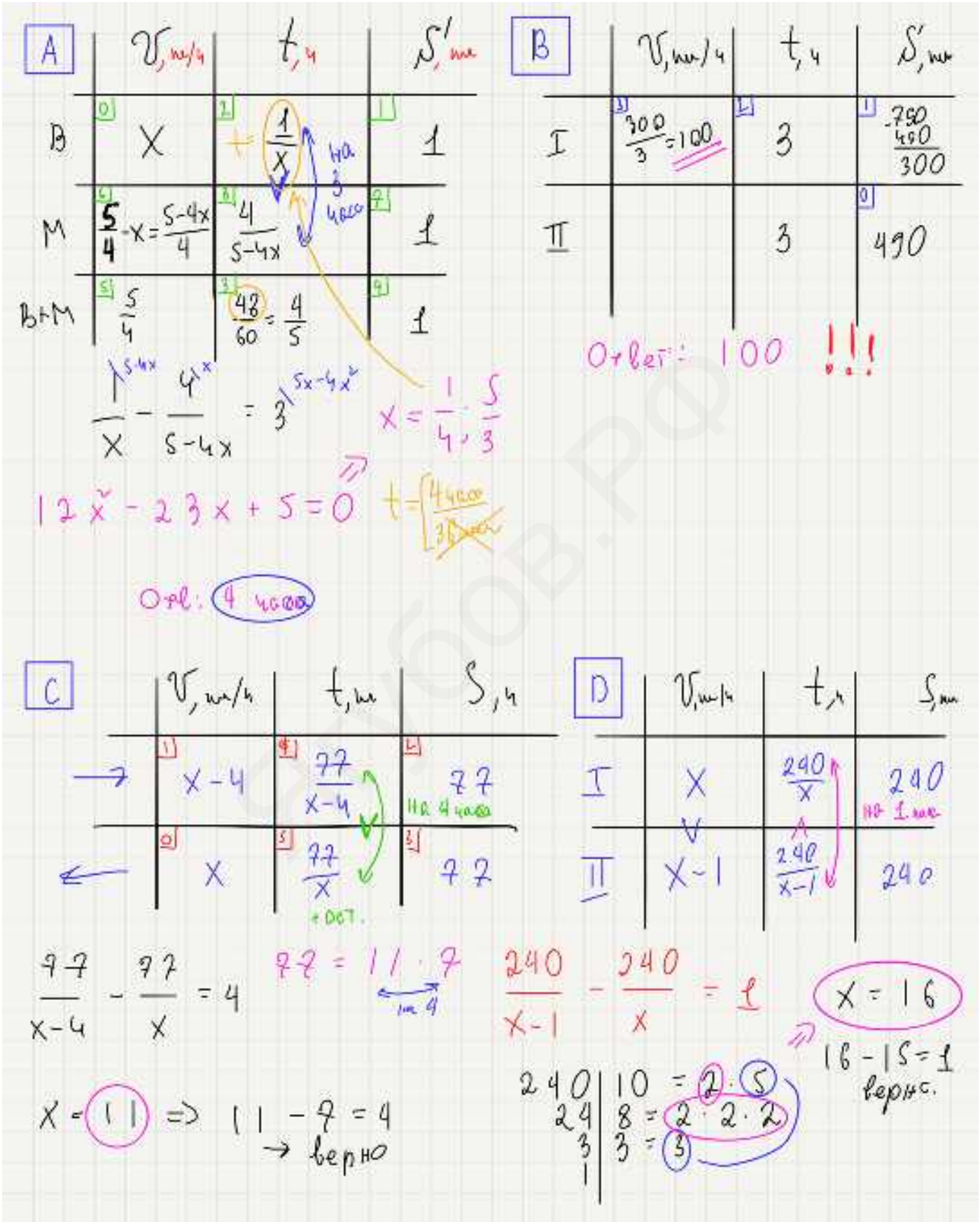
Задания 10 от Романа Борисовича Ягубова



Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задания 11 (A-D) от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задания 11E от Решу ЕГЭ

Автомобиль, выехавший из города B, проехал до места встречи 300 км со скоростью 75 км/ч, затратив 4 часа. Автомобиль, выехавший из пункта A, двигался на 3 часа больше, поэтому проехал 490 км за 7 часов. Следовательно, его скорость равна 70 км/ч.

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задания 12 от Романа Борисовича Ягубова

A $y' = 3x^2 - 108 = 0$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

Ответ: -6

B $\sqrt{x} = t \Rightarrow y = 7 + 15t^2 - t^2 \cdot t$

$y = 7 + 15t^2 - t^3$

$y' = 30t - 3t^2 = 0$

$3t(10 - t) = 0$

$x = t^2 = 100$!!!

C $y' = -24 + 3\sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = 8$

$x = 64$

др. точ. нет.

D $y' = 21 + 3\sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = 7$

$x = 49$

друг. точек нет.

E $y' = 9 - 1{,}5\sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x} = 6$

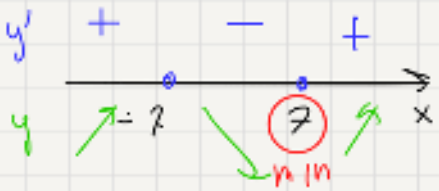
$x = 36$

друг. точек нет

F $y' = 3x^2 - 147 = 0$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7$



G $y' = 1{,}5\sqrt{x} - 12 = 0$

$\sqrt{x} = 8$

$x = 64$

других х. точек нет.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 13

13А от Романа Борисовича Ягубова

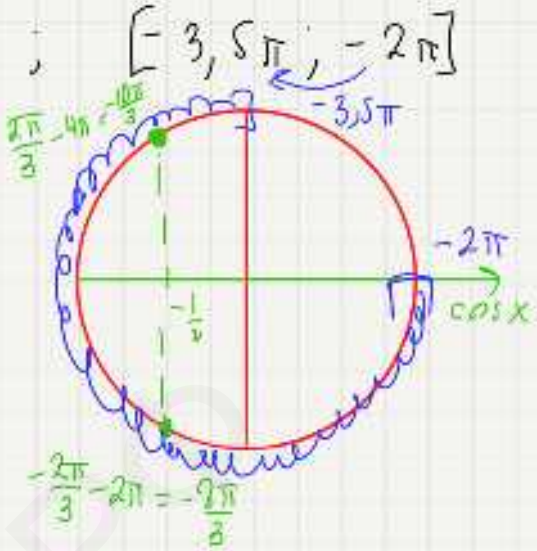
$4\cos^2 x - 8\cos x - 5 = 0$

$D = 64 + 80 = 12^2$

$\cos x = \frac{8 \pm 12}{8} = \frac{20}{8};\ -\frac{1}{2}$

а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

б) $-\frac{10\pi}{3};\ -\frac{8\pi}{3}$



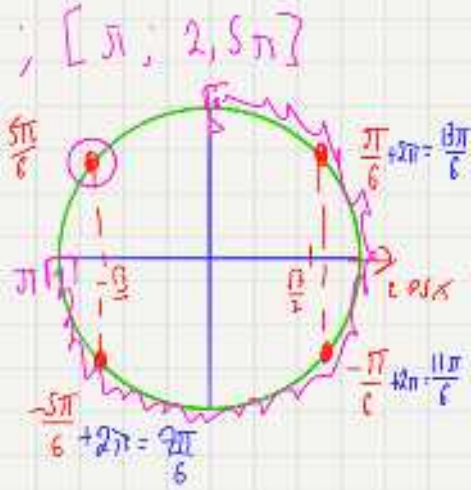
13В от Романа Борисовича Ягубова

$(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin^2 x = 0,75$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13С от Решу ЕГЭ

а) Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и формулой приведения:

$$1-2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x-2=0.$$

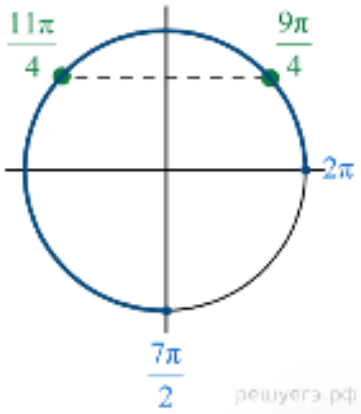
Пусть $t=\sin x$. Тогда получаем:

$$2t^2+\sqrt{2}t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2}, \\ t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=-\sqrt{2}, \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, \\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13D от Романа Борисовича Ягубова

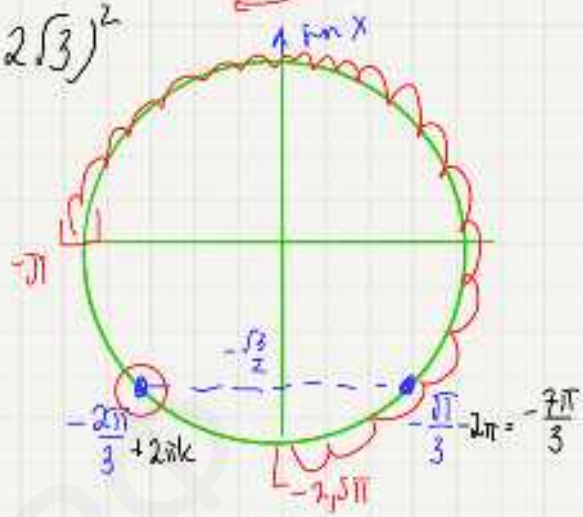
$8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x - 9 = 0$; $[-2,5\pi; -\pi]$

$D = 12 + 4 \cdot 8 \cdot 9 = 12(1+24) = (5\cdot 2\sqrt{3})^2$

$\sin x = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 10\sqrt{3}}{16} = \dfrac{12\sqrt{3}}{16}; \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

а) $-\dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

б) $-\dfrac{7\pi}{3}$



13E от Романа Борисовича Ягубова

$\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1$; $[1,5\pi; 3\pi]$

$2\sin x \cdot \cos x - \sin x = 1 - 2\cos x$

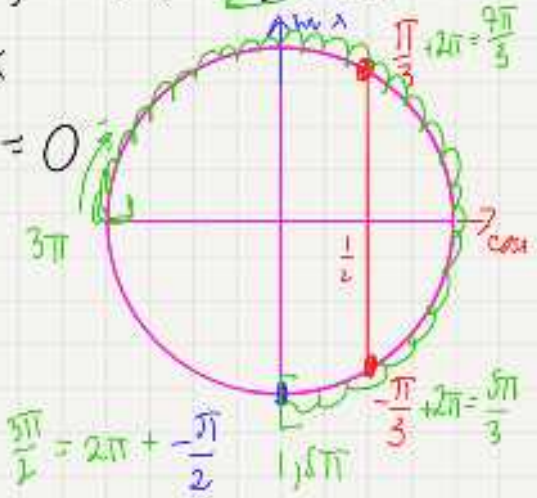
$\sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0$

$(2\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$; $\sin x = -1$

а) $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$; $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

б) $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{3}$; $\dfrac{7\pi}{3}$



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13F от Людмилы Скрипка

13. F а) $2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+1=0$ б) $\left[-2\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$

а) 1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$

2) $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

3) $2(1-\sin^2 x)+\sqrt{3}\sin x+1=0$

$2-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+1=0$

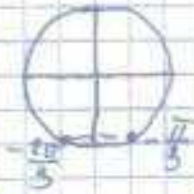
$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x-3=0$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4\cdot 2\cdot 3}}{4}$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}\pm 3\sqrt{3}}{4}$

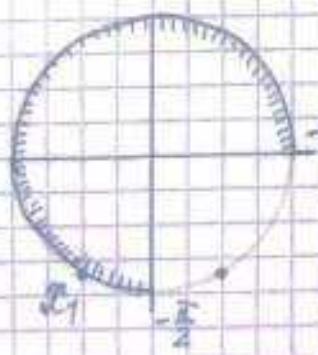
$\left[\begin{array}{l}\sin x=\sqrt{3}\text{, нет корней, т.к. } \sqrt{3}\notin[-1;1]\\ \sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{, есть корни, т.к. } -\frac{\sqrt{3}}{2}\in[-1;1]\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k\end{array}\right., k\in Z$



б) $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$; $-\frac{\pi}{2}-(-2\pi)=-\frac{\pi}{2}+2\pi=\frac{3\pi}{2}$ - длина отрезка

$x_1=-2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}=-\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$

б) $-\frac{2\pi}{3}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13G от Романа Борисовича Ягубова

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\cos x + 1 = 0 \quad ; \quad [2\pi, 3,5\pi]$

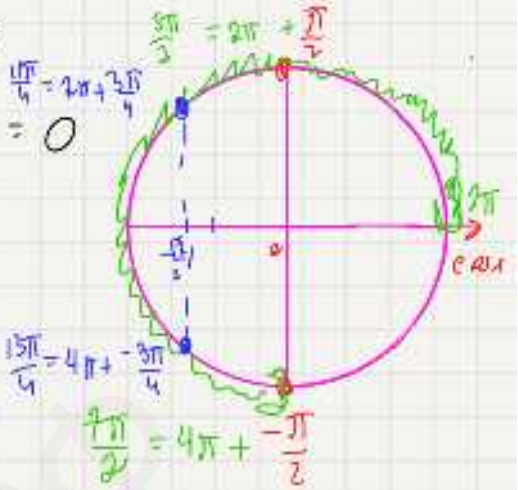
$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x = \cos x \cdot (2\cos x + \sqrt{2}) = 0$

$\cos x = 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}$

а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}$



Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13Н от Аиды Ахнавовны Анисимовой

а) $6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$; б) $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

а) $6(1-\sin^2 x) + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$6\sin^2 x - 5\sqrt{2}\sin x - 8 = 0$

$D = 50 + 192 = 242 = (11\sqrt{2})^2$

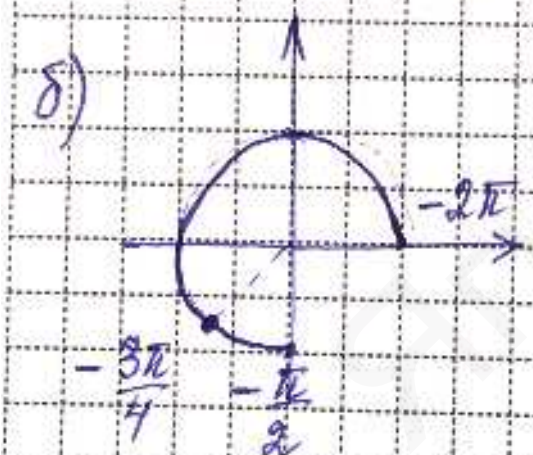
$\sin x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\emptyset$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$

б)



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{3\pi}{4}$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13Н от Григорьева Кирилла

№13 а) $6\cos^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$3 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$3 + 3\cos 2x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0$

$3\cos 2x + 5\sqrt{2}\sin x + 5 = 0$

$3\cos^2 x - 3\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 5 = 0$

$3(1 - \sin^2 x) - 3\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 5 = 0$

$3 - 3\sin^2 x - 3\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 5 = 0$

$-6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 8 = 0$

$6\sin^2 x - 5\sqrt{2}\sin x - 8 = 0$

$\sin x = t;\ |t| \le 1$

$6t^2 - 5\sqrt{2}t - 8 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 25 \cdot 2 - 4 \cdot 6 \cdot (-8) = 50 + 192 = 242$

$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{242}}{12} = \frac{5\sqrt{2} + 11\sqrt{2}}{12} = \frac{16\sqrt{2}}{12} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ – не подх. по условию

$t_2 = \frac{5\sqrt{2} - 11\sqrt{2}}{12} = \frac{-6\sqrt{2}}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13I от Романа Борисовича Ягубова

$\cos 2x + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2 = 0$; $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

а) $(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{3}\sin x + 2 = 0$

$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$

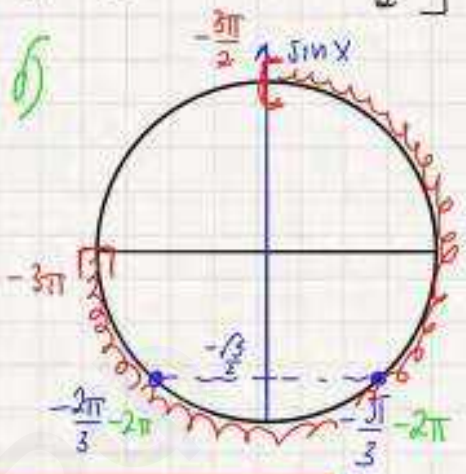
$D = 3 + 24 = (3\sqrt{3})^2$

$\sin x = \frac{\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\varnothing$

$-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \; k \in Z$

б)



$-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13J от Аиды Ахнавовны Анисимовой

а) $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$; б) $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

а) $2\cos 2x + 2\sin^2 x = 1{,}5$

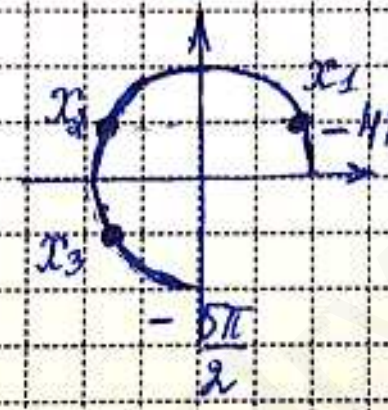
$2\cos 2x + 1 + \cos 2x = 1{,}5$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$

б)



$x_1 = -4\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{23\pi}{6}$

$x_2 = -3\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{19\pi}{6}$

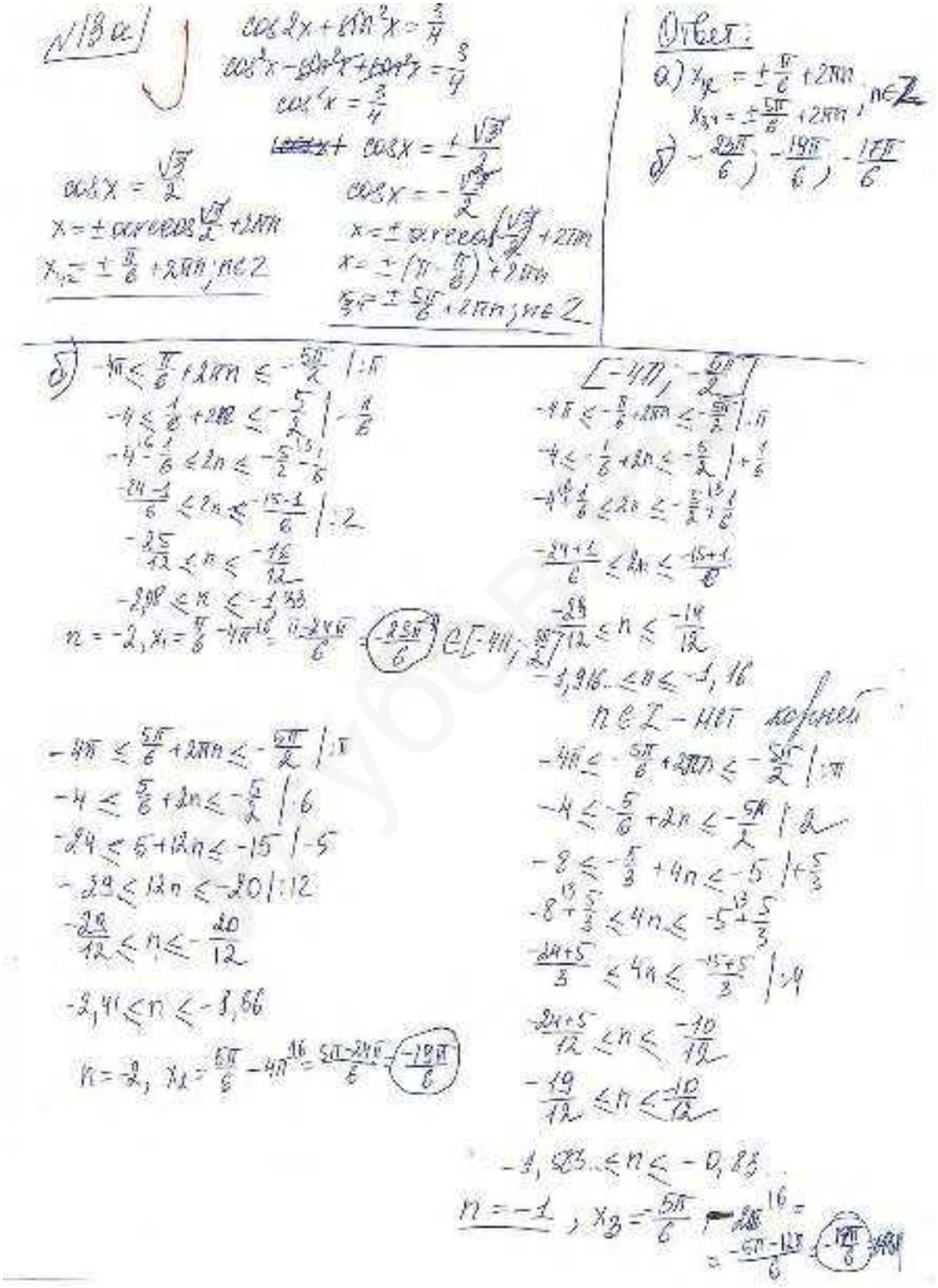
$x_3 = -3\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{17\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{23\pi}{6}; -\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13J от Григорьева Кирилла



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13К от Людмилы Скрипка

13. К а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cdot\sin 2x + 1 = 0$ б) $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

а) 1) $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

2) $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$

3) $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cdot\cos x + 3\cos^2 x = 0.$

Заметим, что в левой части уравнения можно свернуть полный квадрат.

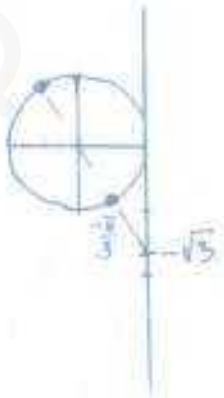
$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 = 0$

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$



б) $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; $2\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ - длина отрезка.

Отберём корни с помощью двойного неравенства

$-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} + \pi k \le 2\pi$

$-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{3} + k \le 2$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \le k \le 2\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{6} \le k \le 2\frac{1}{3}$

$k = 0,\ x = -\frac{\pi}{3}$

$k = 1,\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

$k = 2,\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13L от Людмилы Скрипка

а) $2(1-\cos^2 x) - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x - 3 = 0$

$\cos x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+2\cdot 3}}{2}$

$\cos x = \frac{-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ есть корни, т.к. } \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1;1] \\ \cos x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ нет корней, т.к. } -\frac{3\sqrt{2}}{2} \notin [-1;1] \end{array}\right.$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

б) $\left(-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$; $\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ длина полуинтервала

I способ. Отберём корни с помощью двойного неравенства

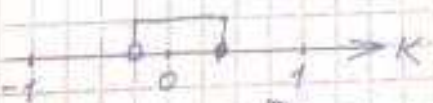
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$-\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k \le \pi$

$-\frac{1}{4} < \frac{1}{4} + 2k \le 1$

$-\frac{1}{2} < 2k \le \frac{3}{4}$

$-\frac{1}{4} < k \le \frac{3}{8}$



$k = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$-\frac{\pi}{4} < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \le \pi$

$-\frac{1}{4} < -\frac{1}{4} + 2k \le 1$

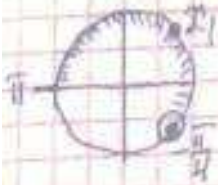
$0 < 2k \le \frac{5}{4}$

$0 < k \le \frac{5}{8}$

нет целых значений k

II способ. Отберём корни с помощью числовой окружности

$x_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

б) $\frac{\pi}{4}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13М от Златы

$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+4=0$

а) $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\cos x + 4 = 0$

$2(1-\cos^2 x) + 3\sqrt{3}\cos x + 4 = 0$

$-2\cos^2 x + 3\sqrt{3}\cos x + 6 = 0$

$\cos x = t$

$-2t^2 + 3\sqrt{3}t + 6 = 0$

$D = 9\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot 6 = 75$

$t_1 = \frac{-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{-2\cdot 2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t_2 = \frac{-3\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{-2\cdot 2} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} > 1$ (не подходит)

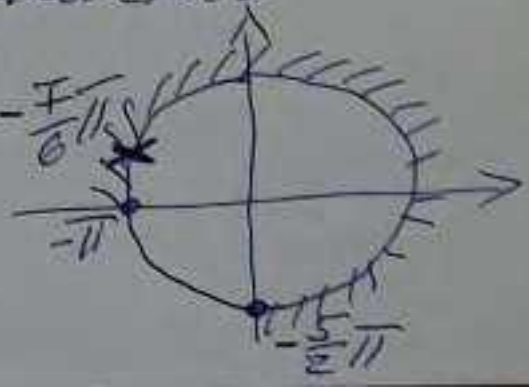
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm\frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

б) $\left[-\frac{5}{2}\pi; -\pi\right]$

Найдём нужные решения с помощью единичной окружности

$-2\pi + \frac{5}{6}\pi = -\frac{7}{6}\pi$



Ответ: $-\frac{7}{6}\pi$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13N от Аиды Ахнавовны Анисимовой

а) $2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 4 = 0$; б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\cos x - 4 = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x - 4 = 0$

$2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$

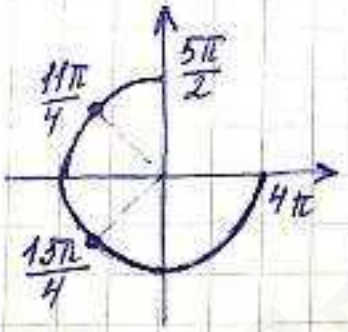
$D = 18 - 16 = 2 = (\sqrt{2})^2$

$\cos x = -\sqrt{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ϕ

$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

б)



$3\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$

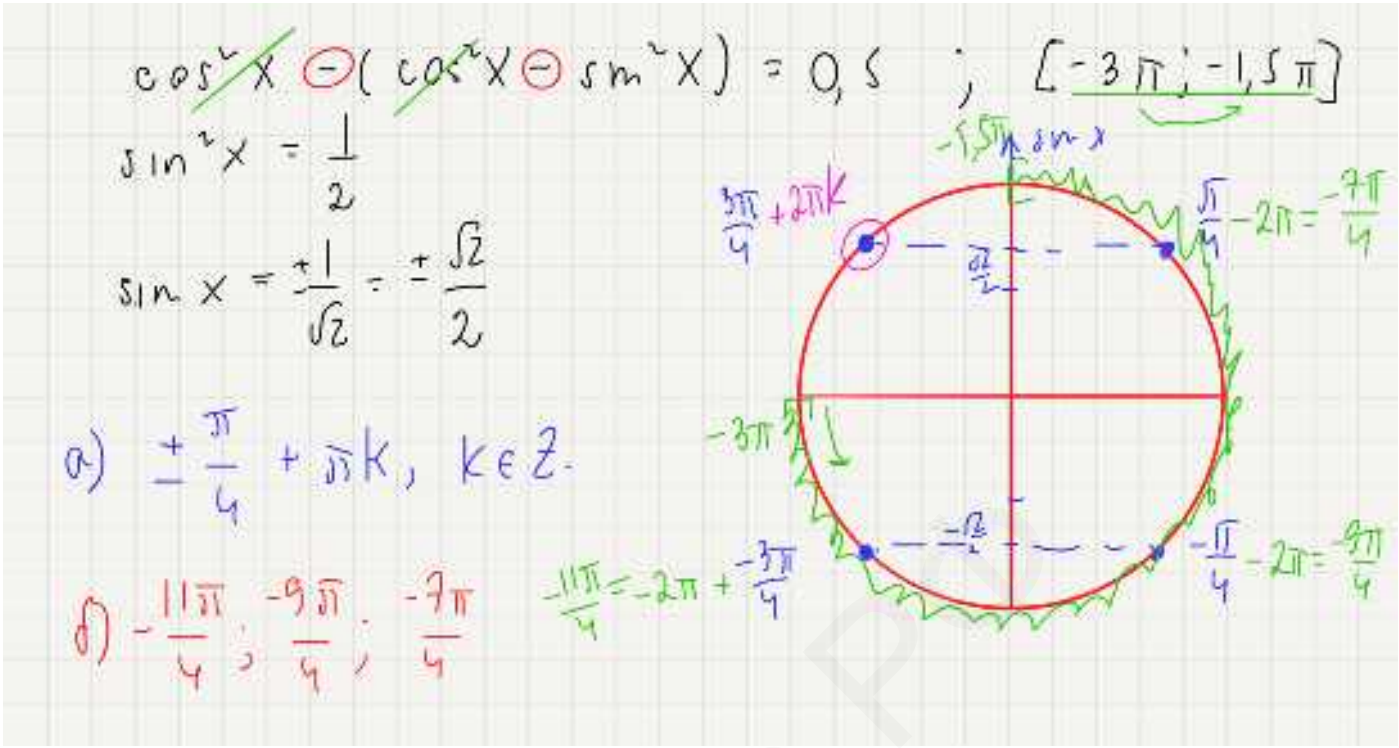
$3\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{4}$

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

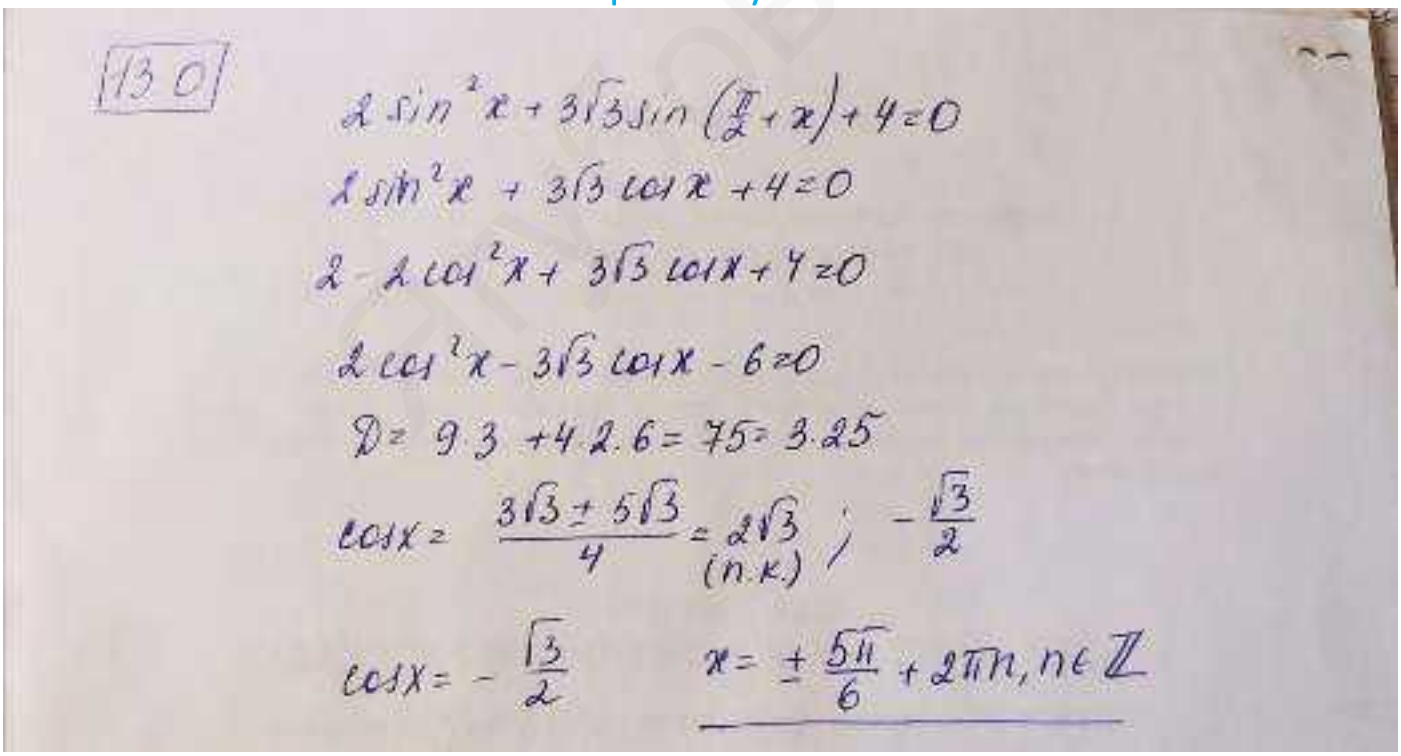
б) $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13Р от Романа Борисовича Ягубова



13О от Ирины Музалевской



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13Q от Галины Сосновской

а). Решим уравнение: $\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2=0;\ (*)$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

По формуле приведения к острому углу получим: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

Подставим в уравнение $(*)$, получим: $2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x - 3 = 0$

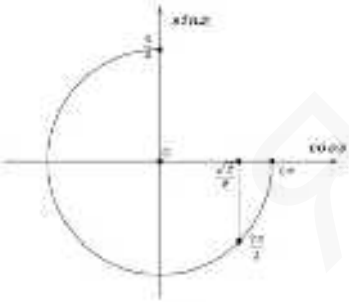
Замена: $t=\cos x$, где $|t|\le 1$

$$2t^2+2\sqrt{2}\cdot t-3=0;\ D=8+24=32;\ \left[\begin{array}{l} t=\frac{-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{4}, \\ t=\frac{-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{4}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ t=\frac{-3\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x=\frac{-3\sqrt{2}}{2}; \end{array}\right. (**)$$

Второе тригонометрическое уравнение $(**)$ не имеет решения, $-1<\cos<1$.

Следовательно, $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2};\ x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$

б). Произведем отбор корней тригонометрического уравнения $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ на единичной окружности. Корни уравнения принадлежат промежутку $x\in\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.



На указанном промежутке уравнение $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет единственный корень: $x=\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$, б) $x=\frac{7\pi}{4}$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13R от Ирины Музалевской

13.R

$\cos 2x + 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 2 = 0$

$2\cos^2 x - 1 + 2\sqrt{2}\cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x - 3 = 0$

$D = 4\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 3 = 32 = 2\cdot 16$

$\cos x = \frac{-2\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (п.к.); $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

13S от Ирины Музалевской

13.S а) $8\sin^2 x - 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$ б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

$8 - 8\cos^2 x - 2\sqrt{3}\cos x + 1 = 0$

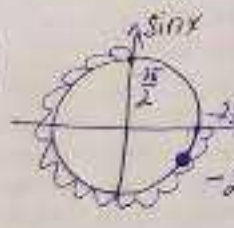
$8\cos^2 x + 2\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$

$D = 4\cdot 3 + 4\cdot 8\cdot 9 = 4\cdot 75 = 3\cdot 100$

$\cos x = \frac{-2\sqrt{3} \pm 10\sqrt{3}}{16} = -\frac{12\sqrt{3}}{16}$ (п.к.); $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б)



$-2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{13\pi}{6}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

13T от Ирины Музалевской

13.T

а) $2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+2=0$ б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

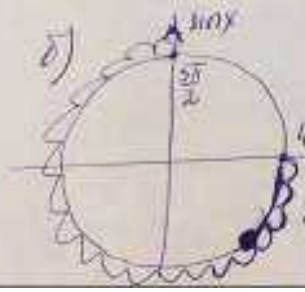
$2-2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0$

$2\cos^2 x + 3\sqrt{2}\cos x - 4 = 0$

$D = 9\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 4 = 2\cdot 25$

$\cos x = \frac{-3\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{4} = \underset{(n.k)}{-2\sqrt{2}};\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



$4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4}$ Ответ:

а) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{15\pi}{4}$

13U от Ирины Музалевской

13.U

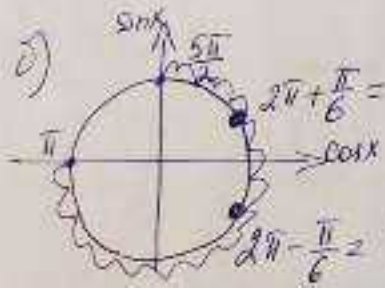
а) $2\cos^2 x + 5\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - 9 = 0$ б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

$2\cos^2 x + 5\sqrt{3}\cos x - 9 = 0$

$D = 25\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot 9 = 49\cdot 3$

$\cos x = \frac{-5\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{4} = \underset{(n.k)}{-3\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$



$2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$

Ответ:

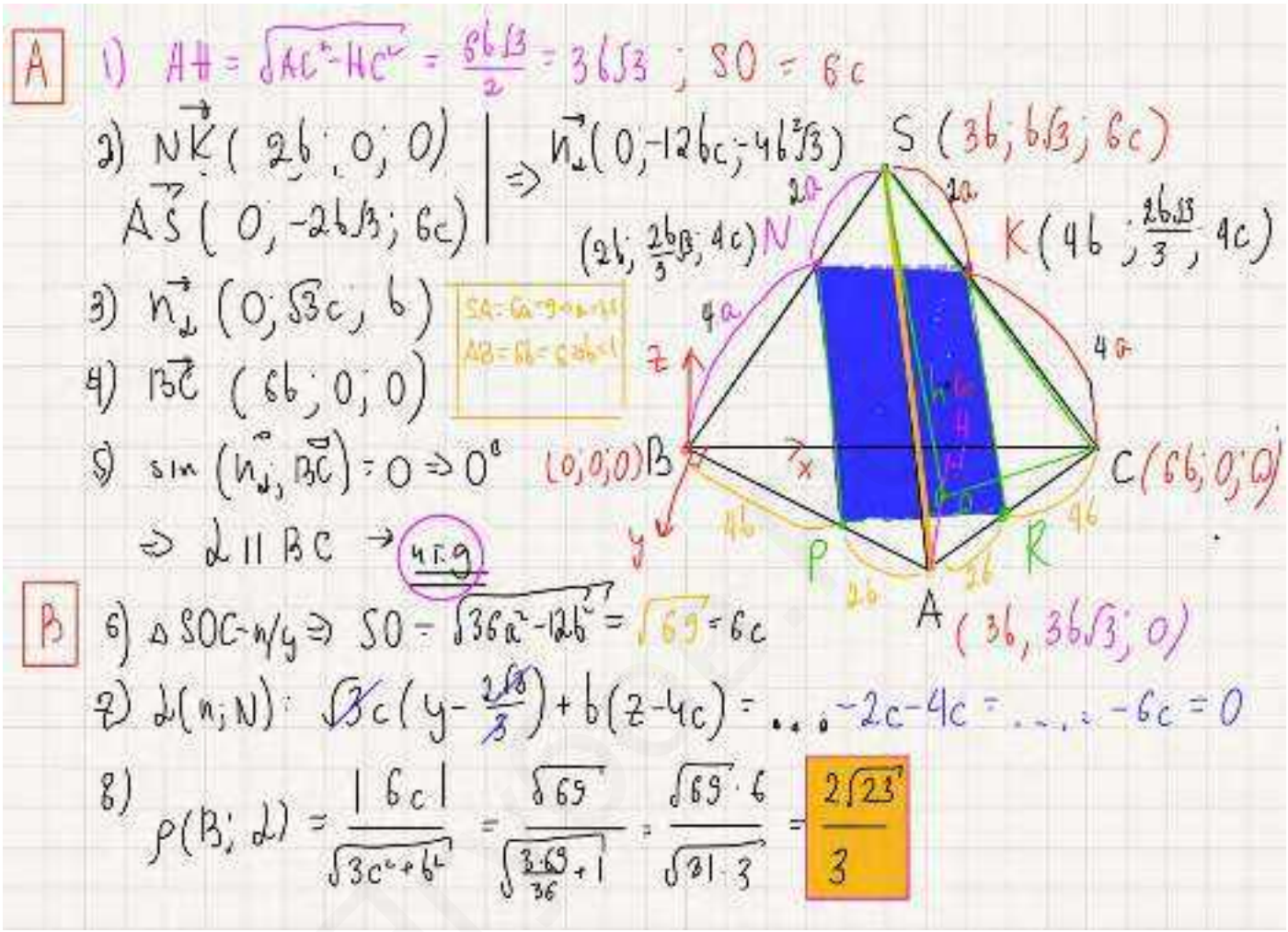
а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 14

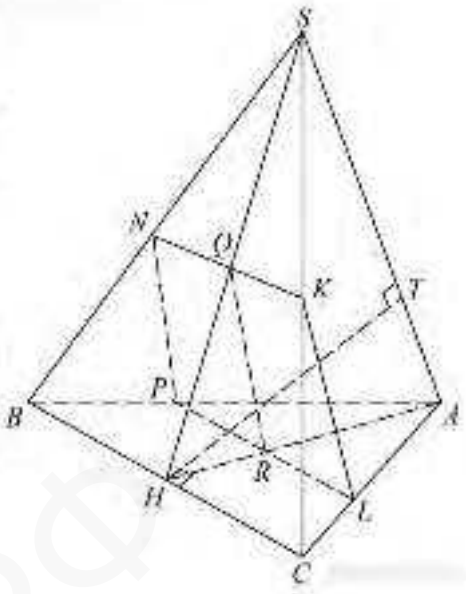
14А от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14А от Решу ЕГЭ

а) Треугольники SNK и SBC подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними, поэтому отрезок NK параллелен BC. Поскольку прямая BC параллельна лежащей в плоскости сечения прямой NK, она параллельна и самой плоскости сечения по признаку параллельности прямой и плоскости.



б) Пусть H — середина BC. Проведём SH и AH и пусть плоскость SHA пересекает ω в точках Q и R (см. рис.). Тогда QR и SA параллельны, а расстояние от точки B до плоскости ω равно расстоянию от точки H до плоскости ω.

В треугольнике SHA имеем: $SA=9$, $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=\sqrt{27}$, $SH=\sqrt{SC^2-CH^2}=\sqrt{72}$. Проведём высоту треугольника HT и найдем её. Пусть $AT=x$, тогда $ST=9-x$, тогда, применяя теорему Пифагора для треугольников ATH и STH, получаем: $HT^2=AH^2-AT^2=SH^2-ST^2$:

$$27-x^2=72-(9-x)^2 \Leftrightarrow 27-x^2=-9+18x-x^2 \Leftrightarrow x=2.$$

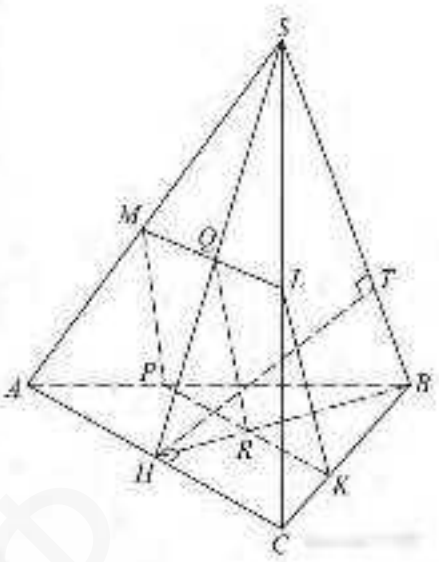
Тогда $HT=\sqrt{27-4}=\sqrt{23}$.

По построению, отрезок HT перпендикулярен ребру SA. В силу параллельности SA и QR, отрезки HT и QR также перпендикулярны. Кроме того, ребро BC перпендикулярно плоскости SHA по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, а потому и BC перпендикулярно HT. Но BC параллельно PN, поэтому HT и PN. Тем самым, прямая HT перпендикулярна двум пересекающимся прямым PN и QR, лежащим в плоскости сечения, а значит, и всей плоскости сечения.

Треугольники SNK и SBC подобны с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому $SQ:QH=1:2$, а тогда треугольники QHR и SHA подобны с коэффициентом 2. Это означает, что плоскость сечения делит высоту HT в отношении 2:1, считая от точки H. Следовательно, расстояние между H и QR равно одной двум третим высоты HT или $\frac{2\sqrt{23}}{3}$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14В от Решу ЕГЭ



а) Заметим, что $BP = BK$, поэтому треугольники PBK и ABC подобны, а тогда $PK \parallel AC$. Поскольку плоскость ω проходит через прямую PK, параллельную плоскости ASC, ω пересекает ASC по прямой, параллельной PK. Пусть эта прямая пересекает SA и SC в точках M и L соответственно. Тогда прямые PK, AC и LM параллельны.

Кроме того, по условию, $\omega \parallel SB$, поэтому прямые MP и LK параллельны SB, а значит, параллельны между собой. Тогда в четырёхугольнике $LMKP$ противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, сечение — параллелограмм.

Скрещивающиеся рёбра правильной пирамиды взаимно перпендикулярны, поэтому перпендикулярны соответственно параллельные им прямые LM и LK. Тем самым, стороны сечения перпендикулярны, следовательно, сечение — прямоугольник. Это и требовалось доказать.

б) Пусть H — середина AC. Проведём SH и BH и пусть плоскость SHB пересекает ω в точках Q и R (см. рис.). Тогда $QR \parallel SB$, а расстояние от точки S до плоскости ω равно расстоянию между параллельными прямыми SB и QR. Найдем его.

В треугольнике SHB длина $SB = 5$, $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{27}$, $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = 4$. Проведём высоту треугольника HT и найдем её. Пусть $BT = x$, тогда $ST = 5 - x$, тогда, применяя теорему Пифагора из треугольников BHT и CHT получаем: $HT^2 = BH^2 - BT^2 = SH^2 - ST^2$:

$$27 - x^2 = 16 - (5 - x)^2 \Leftrightarrow 27 - x^2 = -9 + 10x - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{18}{5}.$$

Тогда $HT = \sqrt{27 - \frac{324}{25}} = \frac{3\sqrt{39}}{5}$.

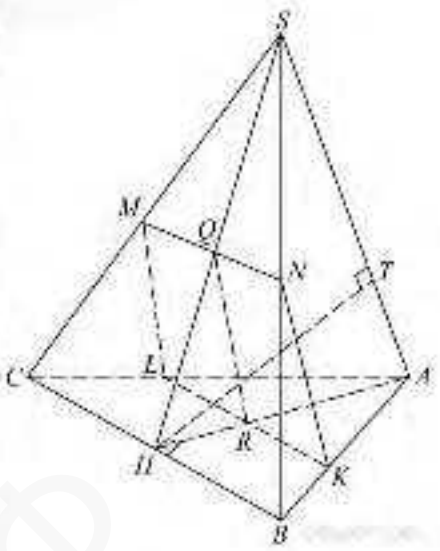
По условию, $\frac{BK}{KC} = \frac{3}{2}$, поэтому $\frac{BR}{RH} = \frac{3}{2}$, а тогда плоскость сечения делит высоту HT в том же отношении? считая от точки T. Следовательно, расстояние между SB и QR равно трем пятым высоты HT или $\frac{9\sqrt{39}}{25}$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14С от Решу ЕГЭ

а) Пусть плоскость пересекает ребро SB в точке N. Поскольку плоскость α параллельна ребру SA, она пересекает грань SBA по прямой, параллельной SA. Тем самым, прямые KN и SA параллельны, треугольники NBK и SBA подобны, а $SN:NB=AK:KB=2:7$, что и требовалось доказать.

б) Пусть плоскость сечения пересекает ребро AC в точке L. Аналогично пункту а) из подобия треугольников MCL и SCA находим, что $AL:LC=SM:MC=2:7$. Из равенства $AL:LC=AK:KB$ следует, что LK и CB параллельны.



Пусть, далее, H — середина BC. Проведём SH и AH и пусть плоскость SHA пересекает α в точках Q и R (см. рис.). Прямая SA параллельна плоскости α, поэтому искомое расстояние от прямой SA до прямой KM равно расстоянию между параллельными прямыми SA и QR. Найдем его.

Найдем длины сторон треугольника SHA: $SA=6$, $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$, $SH=\sqrt{SC^2-CH^2}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$. Проведём высоту треугольника HT и найдем её. Пусть $AT=x$, тогда $ST=6-x$, тогда, применяя теорему Пифагора, из треугольников AHT и SHT получаем: $HT^2=AH^2-AT^2=SH^2-ST^2$:

$$\frac{243}{4}-x^2=\frac{63}{4}-(6-x)^2 \Leftrightarrow \frac{243}{4}-x^2=\frac{63}{4}-36+12x-x^2 \Leftrightarrow x=\frac{27}{4}.$$

Тогда $HT=\sqrt{\frac{243}{4}-\frac{729}{16}}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Наконец, из подобия треугольников QHR и SHA получаем $AR:AH=AK:AB=2:9$, и тогда плоскость сечения делит высоту HT в отношении 2:9, считая от вершины T. Следовательно, расстояние между SA и KM равно двум девятым высоты HT или $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14D от Аиды Ахнавовны Анисимовой

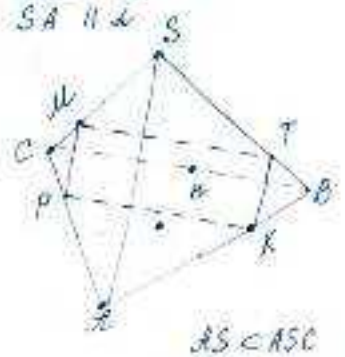
14D $SABC$ – прав., $AB = 4$, $SA = 3$

$K \in AB$, $AK : KB = 3 : 1$,

$M \in SC$, $SM : MC = 3 : 1$

$KM \subset \alpha$

$SA \parallel \alpha$



а) Всё : $\alpha \cap SABC$ – прямоугольник

$\left.\begin{array}{l} ASC \subset ASB \\ AS \parallel \alpha \\ ASB \cap \alpha = KT \end{array}\right| \Rightarrow KT \parallel AS \Rightarrow$

$ST : TB = 3 : 1$ по т. Фалеса

$\left.\begin{array}{l} AS \subset ASC \\ AS \parallel \alpha \\ ASC \cap \alpha = MP \end{array}\right| \Rightarrow MP \parallel AS \Rightarrow AP : PC = 3 : 1$ по т. Фалеса

В $\triangle CSB$ $\frac{SM}{MC} = \frac{ST}{TB} \Rightarrow MT \parallel CB$, $MT = \frac{3}{4} CB$

В $\triangle CKB$ $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KB} = \frac{3}{1} \Rightarrow PK \parallel CB$, $PK = \frac{3}{4} CB$

$\left.\begin{array}{l} PK \parallel MT \\ PK = MT \end{array}\right| \Rightarrow PKMT$ – параллелограмм (по признаку)

H – середина BC, тогда $SH \perp BC$, $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp SAH \Rightarrow BC \perp SA$.

$\left.\begin{array}{l} TK \parallel SA \\ PK \parallel BC \end{array}\right| \Rightarrow \angle(PK, KT) = \angle(BC, SA) = 90^\circ$

$\Rightarrow$ парал-м $MTKP$ – прямоугольник, ч.т.д.

б) Найти V_{MTKP}

$BC \perp SAH$, $PK \parallel BC \Rightarrow PK \perp SAH \Rightarrow MPK \perp SAH$

$SAH \cap MPK = FE$

$\Rightarrow \rho(A, MPK) = \rho(A, FE)$

$S_{AEF} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} S_{ASH} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot SO$

$AH = 2\sqrt{3}$; $SO = \sqrt{3^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}$

$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{3}{32} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{11}}{16}$; $EF = \frac{1}{4} AS = \frac{3}{4}$

$\rho(A, EF) = \frac{2 S_{AEF}}{FE} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{11} \cdot 4}{16 \cdot 3} = \frac{\sqrt{11}}{2}$

$\left.\begin{array}{l} PK = \frac{3}{4} BC = 3 \\ MP = \frac{1}{4} SA = \frac{3}{4} \end{array}\right| \Rightarrow V_{MTKP} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{8}}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14D (б) 2 способ

Т.к PT делит основание пирамиды AMTKP пополам, то $V_{AMTKP} = 2V_{APTK}$

$S_{APK} = \frac{9}{16} S_{ABC}$; $\rho(T, ABC) = \frac{1}{4}\rho(S, ABC)$

$\Rightarrow V_{APTK} = \frac{9}{64} V_{ABC}$; $V_{AMTPK} = \frac{9}{32} V_{ABC}$

$S_{ABC} = 4\sqrt{3}$; $SO = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$

$V_{AMTPK} = \frac{9^3}{32} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{11}}{8}$

Ягубов.РФ

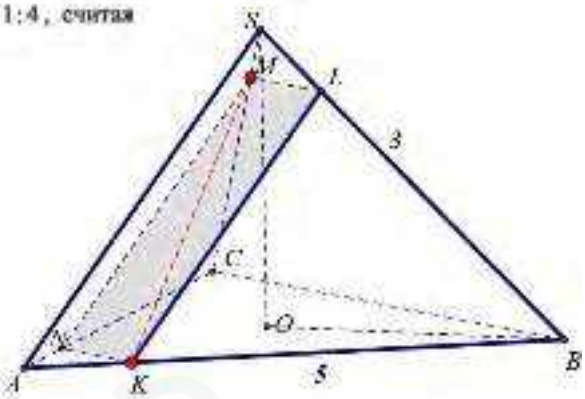
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14E от Елены Ильиничны Хажинской

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 5, а боковое ребро SA равно 3. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK:KB=SM:MC=1:4$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой SA.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AC в отношении $1:4$, считая от вершины A.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KM.



Решение.

а) $\alpha \parallel SA, M \in (ASC) \Rightarrow \alpha \cap (ASC) = MN \parallel SA$. Аналогично, $KL \parallel SA$ и $MNKL$ – сечение пирамиды плоскостью α.

Так как $MN \parallel SA$, то $\frac{AN}{NC} = \frac{SM}{MC} = \frac{1}{4}$.

б) $SA \parallel \alpha, MK \subset \alpha \Rightarrow \rho(SA, KM) = \rho(SA, \alpha) = \rho(A, \alpha)$.

Рассмотрим пирамиду $MANK$.

$V_{MANK} = \frac{1}{3} S_{ANK} \cdot \rho(M, (ABC)); CM = \frac{4}{5} SC \Rightarrow \rho(M, (ABC)) = \frac{4}{5} SO$, где SO – высота пирамиды $SABC$.

С другой стороны $V_{MANK} = \frac{1}{3} S_{MNK} \cdot \rho(A, \alpha) \Rightarrow \rho(A, \alpha) = \frac{S_{ANK} \cdot \frac{4}{5} SO}{S_{MNK}}$,

ΔANK – равносторонний. $AK = 1, S_{ANK} = \frac{\sqrt{3}}{4}; BO = \frac{2}{3} AB \sin 60^\circ = \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$,

$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{9 - \frac{25}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. По свойству правильной пирамиды $AS \perp BC; NM \parallel AS, NK \parallel BC$

$\Rightarrow NM \perp NK; NM = KL = \frac{4}{5} AS = \frac{12}{5}, NM \parallel KL \Rightarrow MNKL$ – прямоугольник.

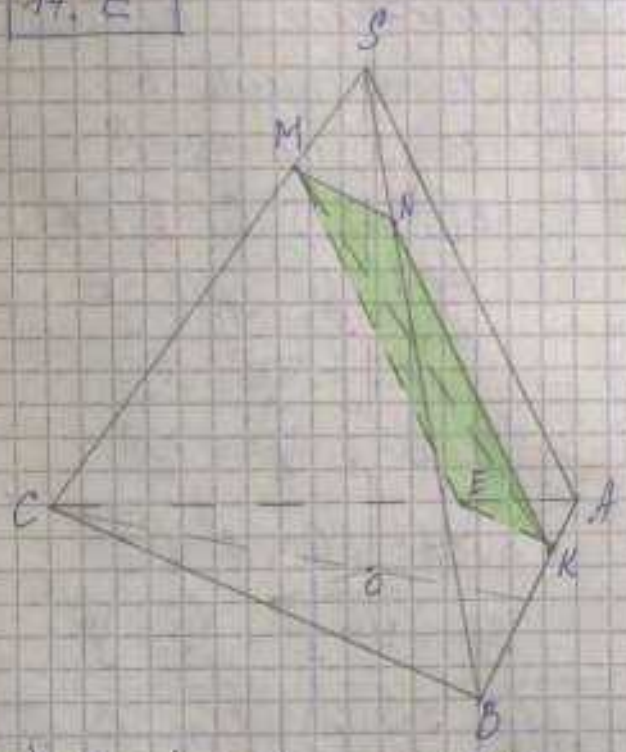
Тогда $S_{MNK} = \frac{1}{2} MN \cdot NK = \frac{6}{5}$ и $\rho(A, \alpha) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14E от Людмилы Скрипка

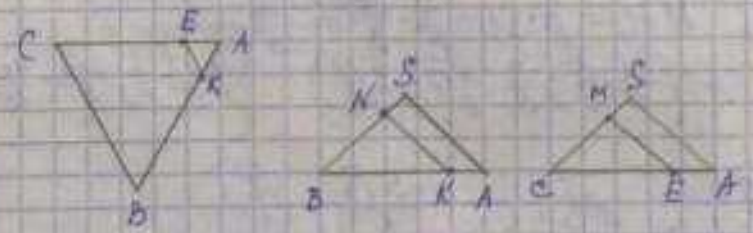
14. E



Дано: $SABC$ – правильная пирамида
$\triangle ABC$ – основание
$SB = 5$, $SA = 3$
$K \in AB$, $M \in SC$
$AK : KB = SM : MC = 1 : 4$
α – плоскость сечения
$KM \subset \alpha$, $\alpha \parallel SA$

а) Док-ть: $AE : EC = 1 : 4$, где $E = \alpha \cap AC$
б) Найти: $S(SA; KN)$.

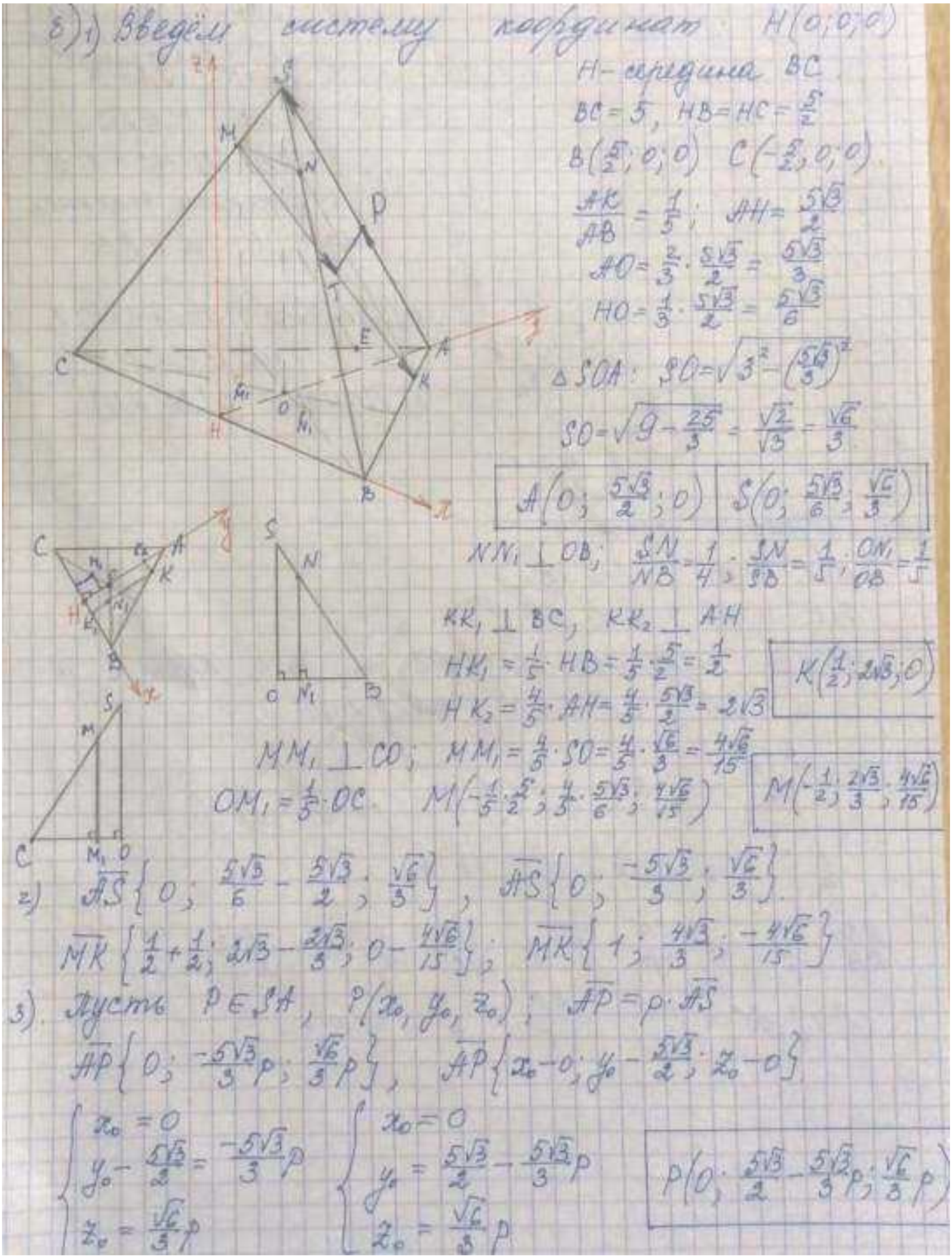
а) Строим сечение.
$KN \parallel AS$, $N \in SB$
$ME \parallel AS$, $E \in AC$
$MNKE$ – искомое сечение α, т.к. $KM \subset \alpha$ и $\alpha \parallel SA$ ($SA \parallel KN$, $KM \subset \alpha$).



$\frac{AK}{KB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SN}{NB} = \frac{1}{4}$; $\frac{SM}{MC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{1}{4}$

$\alpha \cap AC = E$, $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{4}$ ч.т.д.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

4) Пусть $T \in MK$, $T(x_0; y_0; z_0)$, $\overrightarrow{MT} = t \cdot \overrightarrow{MK}$

$\overrightarrow{MT}\{t; \frac{2\sqrt{3}}{3}t; -\frac{4\sqrt{6}}{15}t\}$, $\overrightarrow{MT}\{x_0 + \frac{1}{2}; y_0 - \frac{2\sqrt{3}}{3}; z_0 - \frac{4\sqrt{6}}{15}\}$

$$\begin{cases} x_0 + \frac{1}{2} = t \\ y_0 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}t \\ z_0 - \frac{4\sqrt{6}}{15} = -\frac{4\sqrt{6}}{15}t \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = t - \frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}t \\ z_0 = \frac{4\sqrt{6}}{15} - \frac{4\sqrt{6}}{15}t \end{cases}$$

$$\boxed{T\left(t - \frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}t; \frac{4\sqrt{6}}{15} - \frac{4\sqrt{6}}{15}t\right)}$$

5) Точки P и T „плавающие", их положение зависит от параметра p и t. Потребуем, чтобы $\overrightarrow{PT} \perp MK$ и $\overrightarrow{PT} \perp AS$, тогда длина вектора $\overrightarrow{PT}$ будет искомым расстоянием: $|\overrightarrow{PT}| = \rho(SA; KM)$

6) $\overrightarrow{PT}\{t - \frac{1}{2}; \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}t - \frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{3}p; \frac{4\sqrt{6}}{15} - \frac{4\sqrt{6}}{15}t - \frac{\sqrt{6}}{3}p\}$

$\overrightarrow{PT}\{t - \frac{1}{2}; \frac{4\sqrt{3}}{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}p - \frac{11\sqrt{3}}{6}; \frac{4\sqrt{6}}{15} - \frac{4\sqrt{6}}{15}t - \frac{\sqrt{6}}{3}p\}$

7) $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$; $(t - \frac{1}{2}) \cdot 1 + (\frac{4\sqrt{3}}{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}p - \frac{11\sqrt{3}}{6}) \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} - (\frac{4\sqrt{6}}{15} - \frac{4\sqrt{6}}{15}t - \frac{\sqrt{6}}{3}p) \cdot \frac{4\sqrt{6}}{15} = 0$

$t - \frac{1}{2} + \frac{16 \cdot 3}{9}t + \frac{20 \cdot 3}{9}p - \frac{44 \cdot 3}{18} - \frac{16 \cdot 6}{15 \cdot 15} + \frac{16 \cdot 6}{15 \cdot 15}t + \frac{4 \cdot 6}{15 \cdot 3}p = 0$

$(1 + \frac{16}{3} + \frac{32}{75})t + (\frac{20}{3} + \frac{8}{15})p - (\frac{1}{2} + \frac{22}{3} + \frac{32}{75}) = 0$

$\frac{507}{75}t + \frac{108}{15}p = \frac{413}{50}$

$\frac{169}{25}t + \frac{36}{5}p = \frac{413}{50}$

$$\boxed{338t + 360p = 413}$$

8) $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$; $(t - \frac{1}{2}) \cdot 0 - (\frac{4\sqrt{3}}{3}t + \frac{5\sqrt{3}}{3}p - \frac{11\sqrt{3}}{6}) \cdot \frac{5\sqrt{3}}{3} + (\frac{4\sqrt{6}}{15} - \frac{4\sqrt{6}}{15}t - \frac{\sqrt{6}}{3}p) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = 0$

$-\frac{20 \cdot 3}{9}t - \frac{25 \cdot 3}{9}p + \frac{55 \cdot 5}{18} + \frac{4 \cdot 6}{45} - \frac{4 \cdot 6}{45}t - \frac{6}{9}p = 0$

$\frac{20}{3}t + \frac{25}{3}p - \frac{55}{6} - \frac{8}{15} + \frac{8}{15}t + \frac{2}{3}p = 0$

$\frac{108}{15}t + \frac{27}{3}p = \frac{97}{10}$

$$\boxed{72t + 90p = 97}$$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

9) $\begin{cases} 338t + 360p = 413 \\ 72t + 90p = 97 \end{cases} - \begin{cases} 338t + 360p = 413 \\ 288t + 360p = 388 \end{cases}$

$50t = 25$

$\boxed{t = \frac{1}{2}} \Rightarrow 72 \cdot \frac{1}{2} + 90p = 97, \quad \boxed{p = \frac{61}{90}}$

10) $\overrightarrow{PT}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{61}{90} - \frac{11\sqrt{3}}{6}; \frac{4\sqrt{6}}{15} - \frac{4\sqrt{6}}{15}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{61}{90}\right\}$

$\overrightarrow{PT}\left\{0; -\frac{\sqrt{3}}{27}; -\frac{5\sqrt{6}}{54}\right\}$

$\overrightarrow{PT}\left\{0; \frac{-2\sqrt{3}}{54}; \frac{-5\sqrt{6}}{54}\right\}$

11) $|\overrightarrow{PT}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{-2\sqrt{3}}{54}\right)^2 + \left(\frac{-5\sqrt{6}}{54}\right)^2} = \sqrt{\frac{12+150}{54^2}} =$

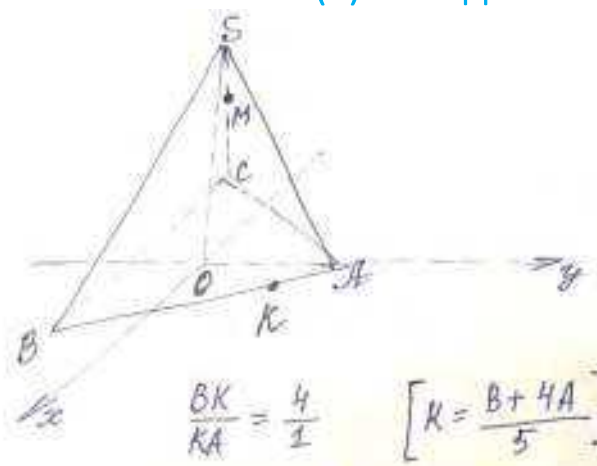
$= \frac{\sqrt{162}}{54} = \frac{\sqrt{81\cdot 2}}{54} = \frac{9\sqrt{2}}{54} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\boxed{\rho(SA; KM) = \frac{\sqrt{2}}{6}}$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14E(б) от Аиды Ахнавовны Анисимовой



$A\left(0;\frac{5\sqrt{3}}{3};0\right)$

$B\left(\frac{5}{2};-\frac{5\sqrt{3}}{6};0\right)$

$C\left(-\frac{5}{2};-\frac{5\sqrt{3}}{6};0\right)$

$S\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

$\frac{BK}{KA}=\frac{4}{1}$ $\left[K=\frac{B+4A}{5}\right]$ – инофиц. "опора" :-)

$K\left(\frac{1}{2};\frac{7\sqrt{3}}{6};0\right)$.

$\frac{CM}{MS}=\frac{4}{1}$ $\left[M=\frac{C+4M}{5}\right]$ $M\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{4\sqrt{6}}{15}\right)$

$\vec{KM}\left\{-1;-\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{6}}{15}\right\}$

$\vec{AS}\left\{0;-\frac{5\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$

$\vec{n}\{x;y;z\}$.

① $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{KM}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AS}=0\end{cases}$

$\begin{cases}-x-\frac{4\sqrt{3}}{3}y+\frac{4\sqrt{6}}{15}z=0\\ -\frac{5\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$

$\begin{cases}15x+20\sqrt{3}y-4\sqrt{6}z=0\\ 5\sqrt{3}y-\sqrt{6}z=0\end{cases}$, $x=0$, $z=\frac{5}{\sqrt{2}}y$

$\exists\,\vec{n}\{0;\sqrt{2};5\}$.

② $K\in KM$; $A\in AS$

$\vec{KA}\left\{-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right\}$

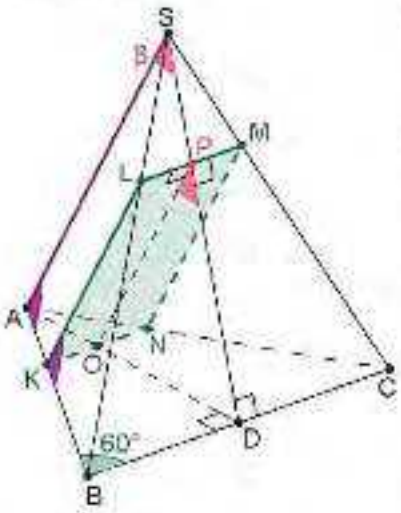
$\rho(KM,AS)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{KA}|}{|\vec{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{27}}=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot3\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14F от Натальи Юрьевны

14. *F*. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро SA равно 4. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём, $AK:KB=SM:MC=1:2$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.
(а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.
(б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.



(а) 1) $BC||\alpha, BC\subset SBC, \alpha\cap SBC=ML\ (L\in SB)\Rightarrow ML||BC$;
аналогично, $BC||\alpha, BC\subset ABC, \alpha\cap ABC=KN\ (N\in AC)\Rightarrow KN||BC$;
тогда $ML||KN$ – единственная плоскость α, четырёхугольник $KLMN$ – сечение пирамиды плоскостью α.
2) В ΔSBC: $ML||BC$, по теореме о пропорциональных отрезках:
$\frac{SL}{BL}=\frac{SM}{MC}=\frac{1}{2}=\frac{AK}{KB}\Rightarrow BL=\frac{2}{3}SB, KB=\frac{2}{3}AB,\ \frac{BL}{CB}=\frac{KB}{AB}, \angle B$ – общий
$\Rightarrow \Delta BKL\sim\Delta BAS$ по 2 признаку $\Rightarrow \angle BKL=\angle BAS$ – соответственные при прямых KL и SA, секущая $AB\Rightarrow SA||AB, AB\subset\alpha\Rightarrow SA||\alpha$ по признаку параллельности прямой и плоскости. ■

(б) 1) $\alpha\cap SBC=LM$. Пусть $BD=CD, KN\cap AD=O, ML\cap SD=P$.
В правильном ΔABC и равнобедренном ΔBSC медианы AD и SD являются высотами, $BC\perp AD, BC\perp SD, AD\cap SD\Rightarrow BC\perp SAD$ по по признаку $\perp$ прямой и плоскости, $ML||BC\Rightarrow ML\perp SAD, PO\subset SAD$, $PD\subset SAD\Rightarrow PO\perp ML, PD\perp ML$, тогда $\angle(\alpha;BSD)=\angle OPD$ по опр – ю.

2) $SA||\alpha, SA\subset SAD, SAD\cap\alpha=PO\Rightarrow SA||PO$, тогда $\angle OPD=\angle ASD=\beta$ как соответственные, сек. SD.

3) Из правильного ΔABC: $AD=AB\cdot\sin60^\circ=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$; из прямоугольного ΔBCD по т. Пифагора:

$$SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\sqrt{SB^2-\frac{BC^2}{4}}=\sqrt{16-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{55}}{2};$$ тогда по теореме косинусов из ΔSAD:

$$\cos\beta=\frac{SA^2+SD^2-AD^2}{2SA\cdot SD}=\frac{16+\frac{55}{4}-\frac{27}{4}}{2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{55}}{2}}=\frac{23}{4\sqrt{55}}\Rightarrow\angle(\alpha;BSD)=\beta=\arccos\frac{23}{4\sqrt{55}}.$$

Ответ: $\arccos\frac{23}{4\sqrt{55}}$.

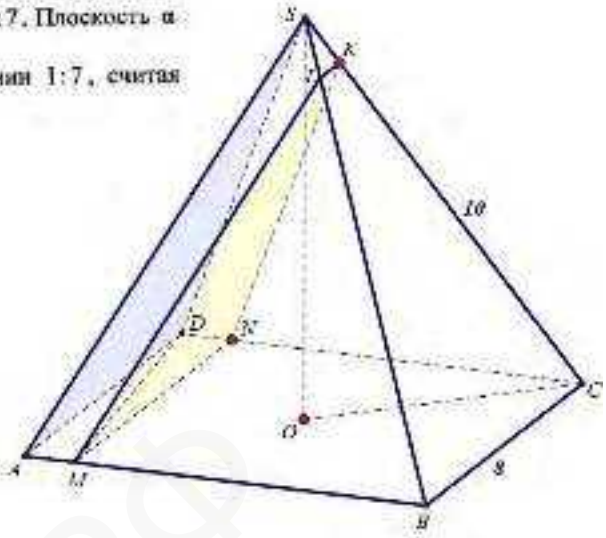
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14G от Елены Ильиничны Хажинской

14 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 10. На рёбрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC=SK:KC=1:7$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $1:7$, считая от вершины S.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и KN.



Решение.

а) $\alpha \parallel BC, KN \subset \alpha \Rightarrow \alpha \cap (ABC) = NM \parallel BC$,

$\alpha \cap (BSC) = KL \parallel BC$. Трапеция $MNKL$ – сечение пирамиды плоскостью α.

$KL \parallel BC; \frac{SK}{KC} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{SL}{LB} = \frac{1}{7}$.

б) $MN \parallel BC, BC \parallel AD \Rightarrow MN \parallel AD; \frac{DN}{NC} = \frac{SK}{KC} \Rightarrow KN \parallel SD \Rightarrow$

$\alpha \parallel (ASD)$ и $\rho(SA, KN) = \rho((ASD), \alpha) = \rho(M, (ASD))$.

Рассмотрим пирамиду $SADM$.

$V_{SADM} = \frac{1}{3} S_{ADM} \cdot SO$, где SO – высота пирамиды $SABC$, $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{10^2 - (4\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17}$.

$S_{ADM} = \frac{1}{2} AM \cdot AD = 4$.

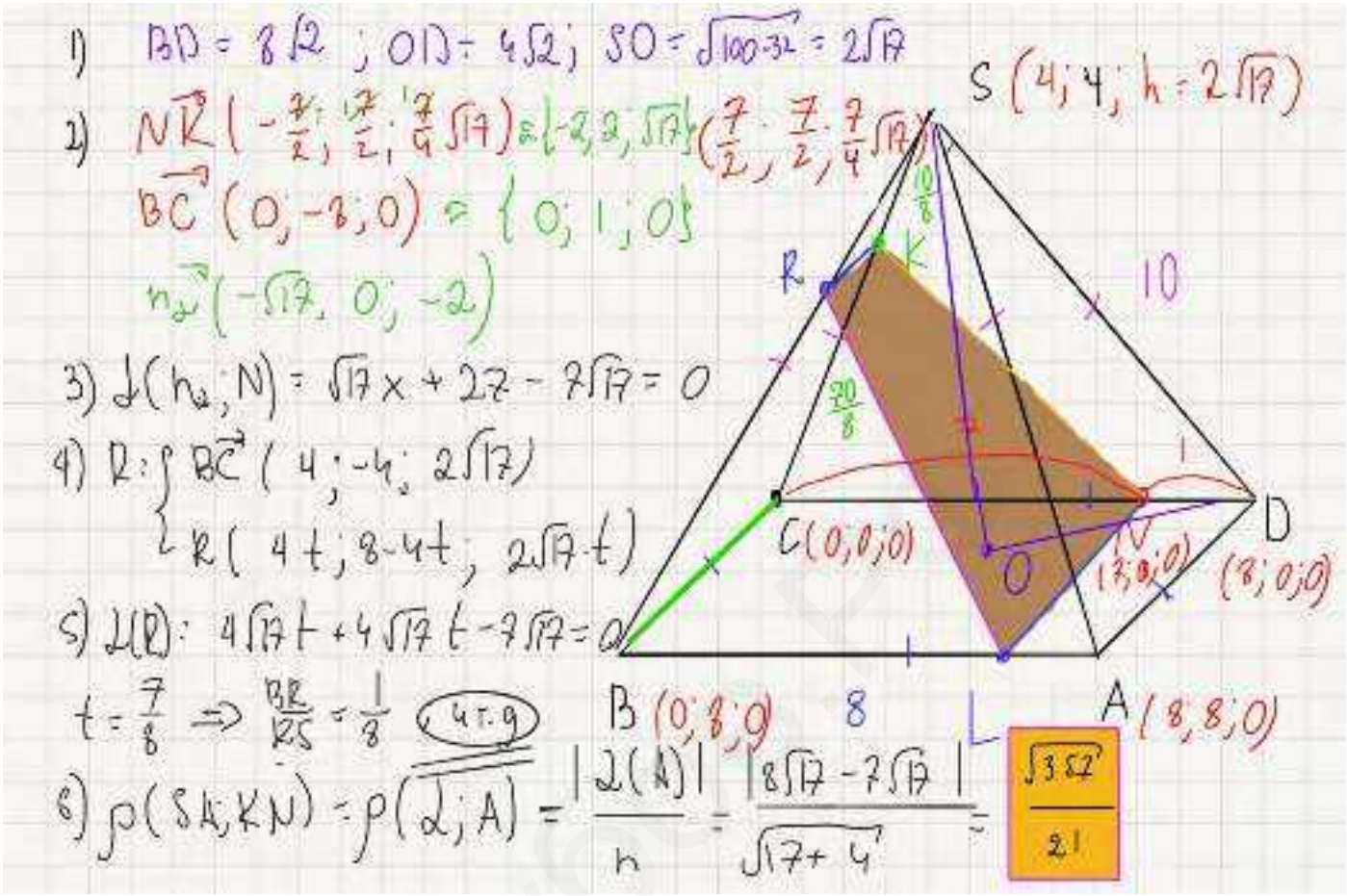
С другой стороны $V_{SADM} = \frac{1}{3} S_{ASD} \cdot \rho(M, (ASD)) \Rightarrow \rho(M, (ASD)) = \frac{S_{ADM} \cdot SO}{S_{ASD}}$.

$S_{ASD} = \sqrt{14 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} = 8\sqrt{21}$ и $\rho(M, (ASD)) = \frac{4 \cdot 2\sqrt{17}}{8\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{357}}{21}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{357}}{21}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14G от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

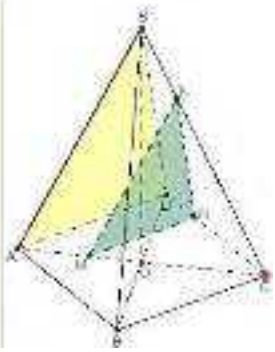
14Н от Натальи Юрьевны

ЕГЭ – 2019.1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 7$, $AS = 14$. На сторонах CD и SC взяты точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 2 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру AS.

☑ а) Докажите, что плоскость α параллельна BC.

☐ б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

ОБНОВИТЬ



Доказательство: *(нажмите на кнопку справа, чтобы открыть или скрыть доказательство)*

1) $AC \cap BD = O$, SO – высота пирамиды. Плоскость $\alpha \supset SCD \supset NK$, и плоскость ΔASC через точку K проведём $KM \parallel AS$, $KM \cap AC = M$, тогда по теореме о пропорциональных прямых $\frac{AM}{MC} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{7} = \frac{DN}{NC}$. $NK \cap KM$ – пересекающиеся, действительно: $AS \cap KM$ (по построению), $KM \subset \alpha \Rightarrow AS \parallel \alpha$ по признаку.

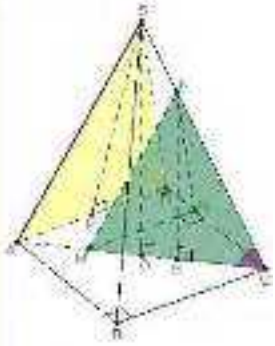
2) Пусть $CK = \frac{2}{7}SC$, $CN = \frac{5}{7}CD$, $CM = \frac{5}{7}AC$, тогда при гомотетии с центром в точке C и $k = \frac{5}{7}$ ΔSAD перейдёт в подобный ему ΔKMN, отрезок AD – параллельный ему отрезок MN, $SC \parallel AD \parallel MN \Rightarrow BC \parallel MN$, $MN \subset \alpha \Rightarrow BC \parallel \alpha$ по признаку (прямая и плоскость). ■

ЕГЭ – 2019.1. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ $AB = 7$, $AS = 14$. На сторонах CD и SC взяты точки N и K соответственно, причём $DN : NC = SK : KC = 2 : 5$. Плоскость α содержит прямую NK и параллельна ребру AS.

☐ а) Докажите, что плоскость α параллельна BC.

☑ б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

ОБНОВИТЬ



Решение: *(нажмите на кнопку справа, чтобы открыть или скрыть решение)*

1) Пусть $\alpha \ni K \parallel BC \Rightarrow \rho(B;\alpha) = \rho(C;\alpha) = d$. Рассмотрим пирамиду $KMNC$: $V_{KMNC} = \frac{1}{3}S_{MNC} \cdot KK_1 = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot d \Rightarrow$

$d = \frac{3V_{KMNC}}{S_{MNC}} = \frac{3V_{KMNC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{MNC}} = \frac{3V_{KMNC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{AC^2}{MN^2}$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AB\sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(7\cdot 2)^2 - \frac{7^2}{2}} = \frac{7\sqrt{14}}{2}$ (по свойству квадрата и теореме Пифагора из прямоугольных ΔABC и ΔSAO соответственно, $SO \perp ABC$, $AC \subset ABC$).

☑ Пирамида $KMNC$

2) $CN = \frac{5}{7}CD = 5$, $MN = \frac{5}{7}AD = 5$, $DA \perp AB$, $AD \perp CD \Rightarrow MN \perp CD$, из прямоугольного ΔCMN: $S_{MNC} = \frac{CN \cdot MN}{2} = \frac{25}{2}$.

3) В ΔSOC проведём $KK_1 \parallel SO$, $KK_1 \cap AC = K_1$, $SO \perp ABC \Rightarrow KK_1 \perp ABC$, т.е. $\rho(K;ABC) = KK_1$, $\angle CKK_1 = \angle CSO$ по 2 углам (90 и $\angle C$ – общий) $\Rightarrow \frac{KK_1}{SO} = \frac{CK}{SC} = \frac{5}{7} \Rightarrow KK_1 = \frac{5}{7}SO = \frac{5}{7}\cdot\frac{7\sqrt{14}}{2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}$.

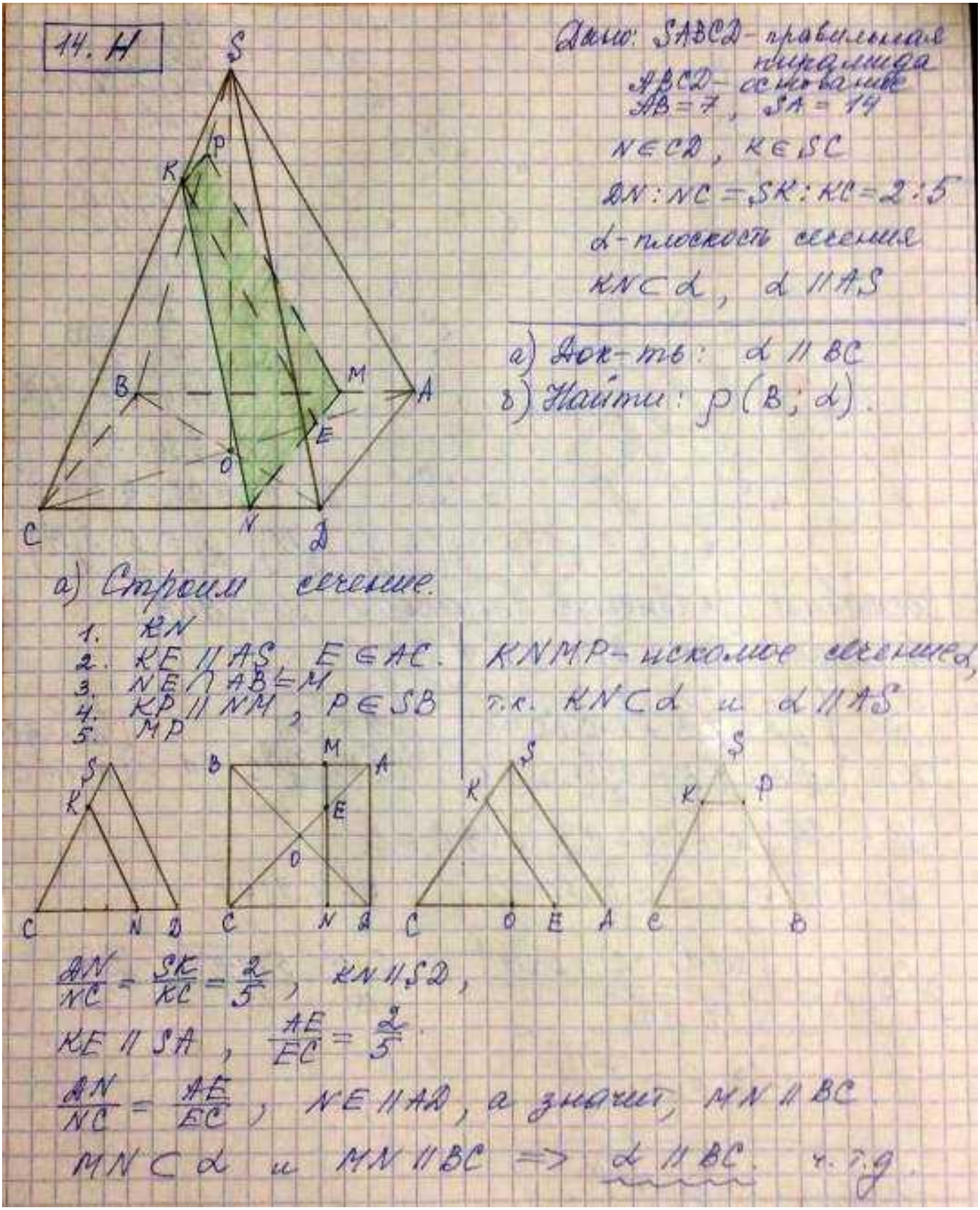
4) В равнобедренном ΔSAD проведём апофему (= высоту) SF, $F = AD$, $SF = \sqrt{SA^2 - AF^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \sqrt{(7\cdot 2)^2 - \frac{7^2}{4}} = \frac{7\sqrt{15}}{2}$,

и тогда (в) $S_{MNC} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 S_{ABC} = \frac{25}{49}\cdot\frac{AD\cdot SF}{2} = \frac{25}{49}\cdot\frac{7\cdot 7\sqrt{15}}{4} = \frac{25\sqrt{15}}{4}$, $d = \frac{25\cdot 5\sqrt{14}\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 25\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{210}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{210}}{3}$.

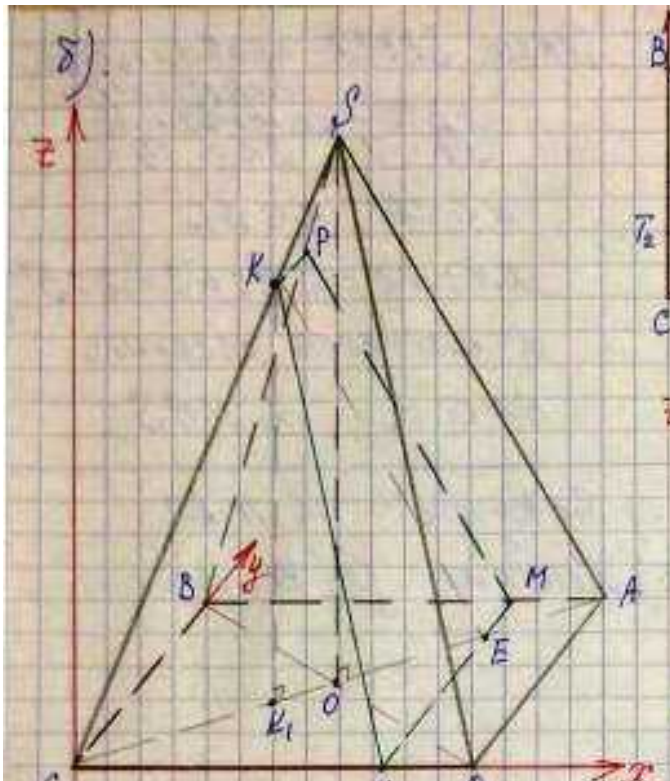
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

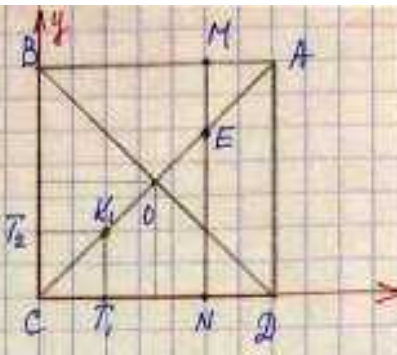
14Н от Людмилы Скрипка

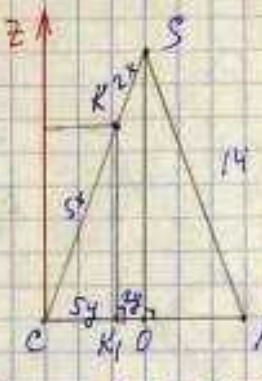


Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

б).







Введём систему координат:

$C(0;0;0)$

$N(5;0;0)$

$B(0;7;0)$

$M(5;7;0)$

$CA = 7\sqrt{2}$

$CO = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

$SO = \sqrt{14^2 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{7^2 \cdot 4 - 7^2 \frac{1}{2}} = \frac{7\sqrt{14}}{2}$

$KK_1 = \frac{5}{7} \cdot SO = \frac{5\sqrt{14}}{2}$

$CT_1 = CT_2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 = \frac{5}{2}$.

$S\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}; \frac{7\sqrt{14}}{2}\right)$; $K\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{14}}{2}\right)$.

Составим уравнение плоскости $\alpha = (MNK)$ в виде $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\begin{cases} M: & 5A + 7B + 0 \cdot C + D = 0 \\ N: & 5A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0 \\ K: & \frac{5}{2}A + \frac{5}{2}B + \frac{5\sqrt{14}}{2}C + D = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0 \\ D = -5A \\ \frac{5}{2}A + \frac{5\sqrt{14}}{2}C - 5A = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0 \\ D = -5\sqrt{14}C \\ A = \sqrt{14}C \end{cases}$$

$\alpha: \sqrt{14}C x + 0 \cdot y + Cz - 5\sqrt{14}C = 0.$

$\alpha: \boxed{\sqrt{14} \cdot x + z - 5\sqrt{14} = 0.}$ $\quad B(0;7;0)$

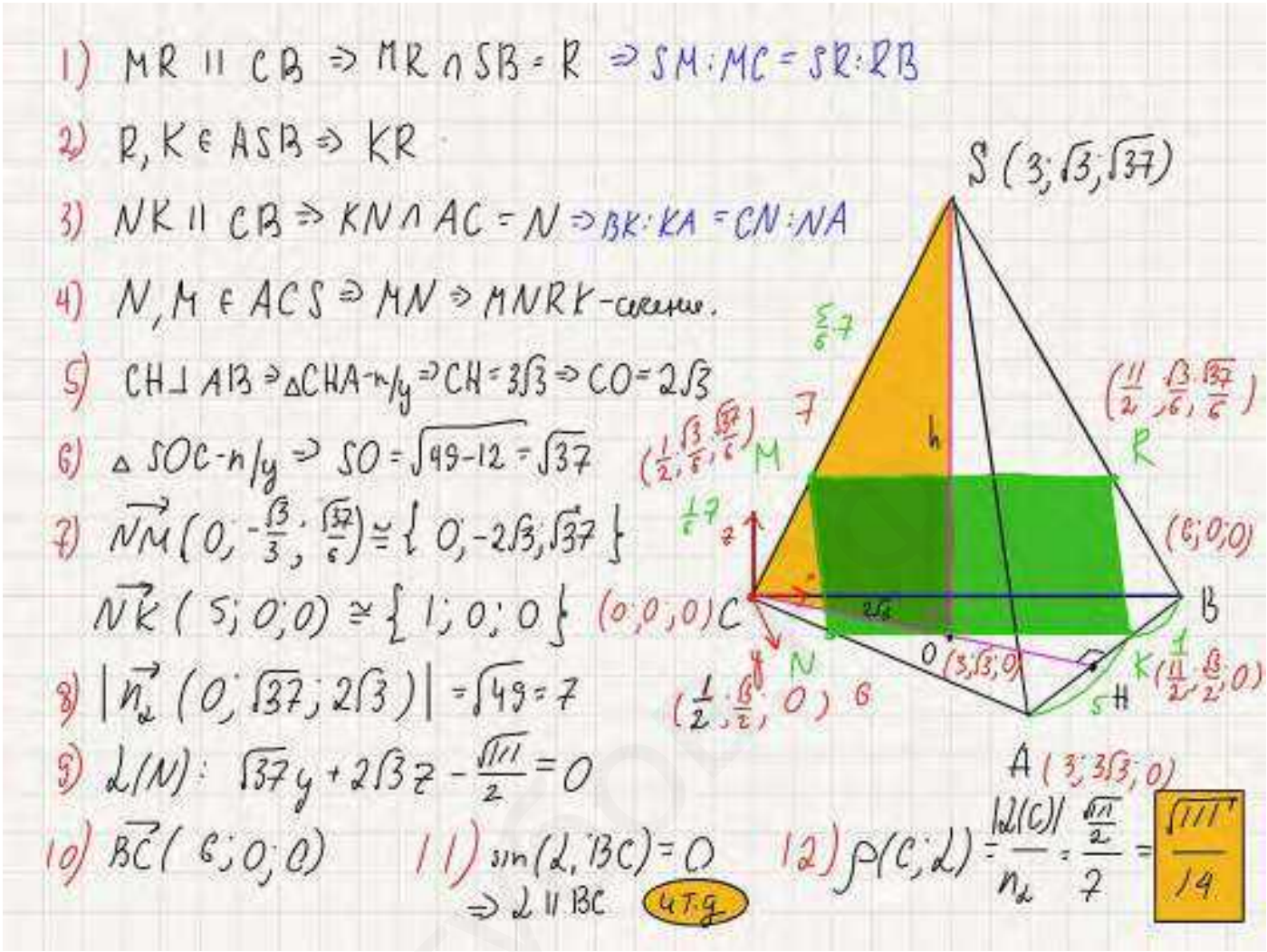
$$\rho(B;\alpha) = \frac{|\sqrt{14} \cdot 0 + 0 - 5\sqrt{14}|}{\sqrt{14+1}} = \frac{5\sqrt{14}}{\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{14 \cdot 15}}{15} = \frac{\sqrt{210}}{3}$$

$$\boxed{\rho(B;\alpha) = \frac{\sqrt{210}}{3}}$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{210}}{3}$

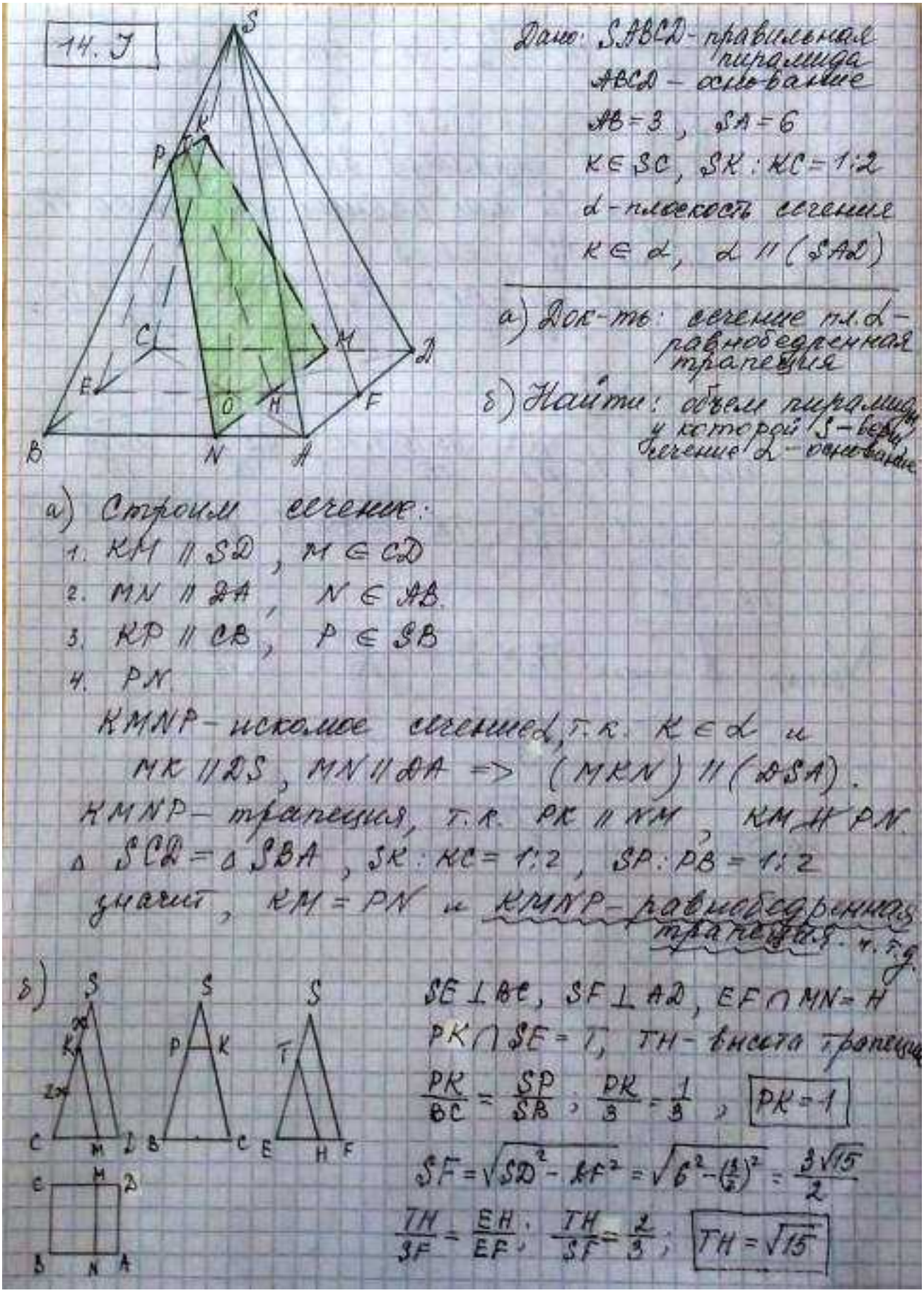
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14I от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14J от Людмилы Скрипка



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

$S_{KMNP} = \frac{PK+MN}{2} \cdot TH = \frac{1+3}{2} \cdot \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$ $\boxed{S_{KMNP} = 2\sqrt{15}}$

$SL \perp TH$, $TR \perp SF$, $SL = TR$.

Высотой пирамиды $SKMNP$ будет отрезок SL или равный ему отрезок TR.

$SF = SE = \frac{3\sqrt{15}}{2}$, $EF = 3$.

$\cos\angle S = \frac{SF^2 + SE^2 - EF^2}{2 \cdot SF \cdot SE} = \frac{\frac{9 \cdot 15}{4} + \frac{9 \cdot 15}{4} - 9}{2 \cdot \frac{9 \cdot 15}{4}} = \frac{9\left(\frac{15}{2} - 1\right) \cdot 2}{9 \cdot 15} =$

$= \frac{13}{15}$

$\sin\angle S = \sqrt{1 - \left(\frac{13}{15}\right)^2} = \frac{\sqrt{(15-13)(15+13)}}{15} = \frac{\sqrt{2 \cdot 28}}{15} = \frac{2\sqrt{14}}{15}$

$\triangle STR$: $\sin\angle S = \frac{TR}{TS}$, $TR = TS \cdot \sin\angle S = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{14}}{15} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$

$\boxed{TR = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}}$

$V_{SKMNP} = \frac{1}{3} \cdot S_{KMNP} \cdot TR = \frac{1 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \sqrt{14}}{3 \cdot \sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$

$V = \frac{2\sqrt{14}}{3}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{14}}{3}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

14J от Романа Борисовича Ягубова

1) $\triangle ABD$ - п/у $\Rightarrow BD = 3\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

2) $\triangle SBO$ - п/у $\Rightarrow h = \sqrt{36 - \frac{9 \cdot 2}{4}} = 3\sqrt{4 - \frac{2}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$

3) $SK : KC = 1 : 2$, $SC = 6 \Rightarrow SK = 2$; $CK = 4$.

4) $SD \in (SAD)$, $KR \parallel SD$ $\Rightarrow$ $KR \cap CD = R$, $CK : KS = CR : RD$

5) $AD \in (SAD)$, $RQ \parallel AD$ $\Rightarrow$ $RQ \cap BA = Q$, $CR : RD = BQ : QA$

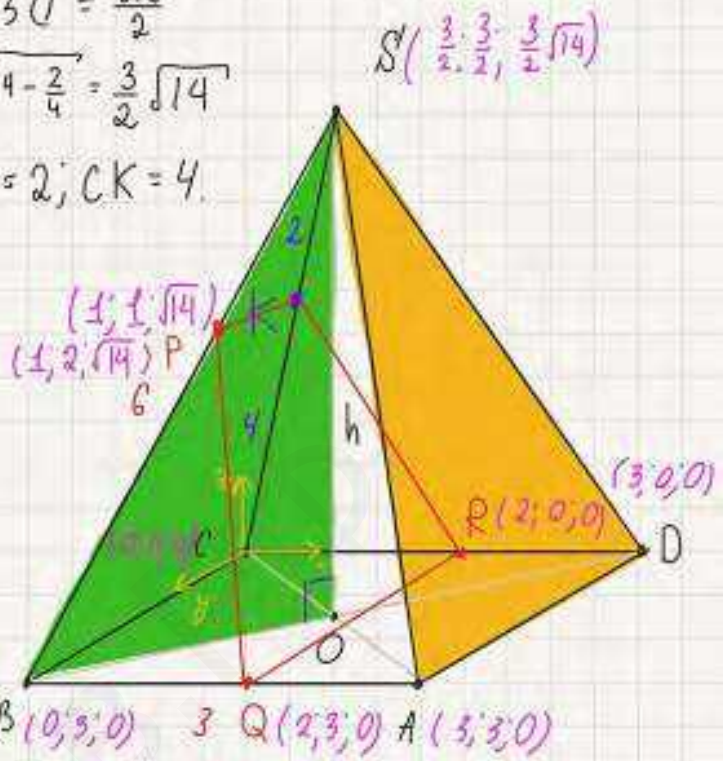
6) $SA \in (ASD)$, $SA \parallel QP$ $\Rightarrow$ $QP \cap BS = P$, $BQ : QA = BP : PS$

7) $P, K \in SBC \Rightarrow PK$ - секущая.

8) $RQ \parallel BC$, $PK \parallel BC \Rightarrow PK \parallel QR$

9) $BK = KC = 4$, $BQ = CR = 2$, $\angle SBQ = \angle SCR$ $\Rightarrow \triangle BPQ = \triangle CKR$ (с у с) $\Rightarrow PQ = KR$

$\Rightarrow$ $QPKR$ - р/б трап. ч.т.д.



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

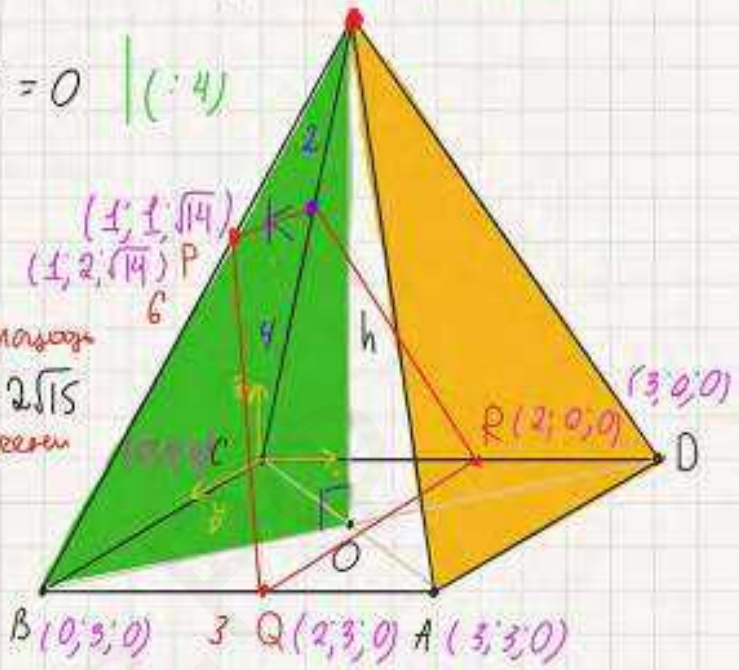
10) $\alpha: \begin{vmatrix} \vec{KQ}(1;2;-\sqrt{14}) \\ \vec{RP}(-1;2;\sqrt{14}) \end{vmatrix} \Rightarrow \left| \vec{n_\alpha}(4\sqrt{14};0;4) \right| = 4\sqrt{15}$ вект. нормали

11) $\alpha(K): x\sqrt{14} + z - 2\sqrt{14} = 0 \quad |\cdot 4$ уравн. плоскости

12) $\rho(S;\alpha) = \frac{|\alpha(S')|}{n_\alpha} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$ расст. от т. до пл.

13) $V_{пир} = \frac{1}{3} S_0 h$, $S_0 = \frac{n_\alpha}{2} = 2\sqrt{15}$ площадь сечения

$V_{SPKRQ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{15}}{1} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$



Ответ: $\frac{2\sqrt{14}}{3}$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 15

15А от Андрея Яковлева

(A) $\log_2(14-14x) \geq \log_2(x^2-5x+4)+\log_2(x+5)$

$\log_2(14(1-x)) \geq \log_2((x-1)(x-4))+\log_2(x+5)$

$\log_2(14(1-x)) \geq \log_2((1-x)(4-x))+\log_2(x+5)$

$\log_2 14+\log_2(1-x) \geq \log_2(1-x)+\log_2(4-x)+\log_2(x+5)$

$\begin{cases}\log_2 14 \geq \log_2(4-x)+\log_2(x+5)\\ 1-x>0\end{cases}$

$\begin{cases}\log_2 14 \geq \log_2((4-x)(x+5))\\ 1-x>0\\ x+5>0\end{cases}$

$\begin{cases}14 \geq 4x+20-x^2-5x\\ -5<x<1\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+x-6 \geq 0\\ -5<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x+3) \geq 0\\ -5<x<1\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x \geq 2\\ x \leq -3\end{array}\right.\\ -5<x<1\end{cases}$ $-5<x\leq -3$

Ответ. $(-5;-3]$.

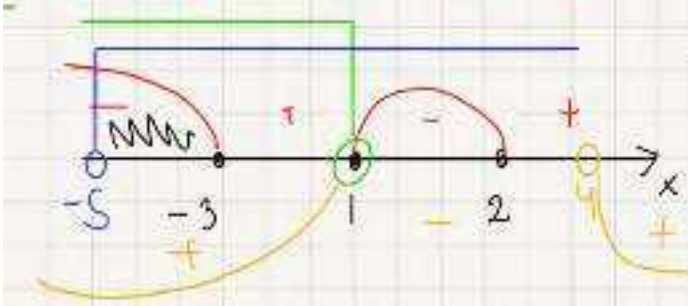
15А от Романа Борисовича Ягубова

$2>1 \Rightarrow 14(1-x) \geq (x-1)(x-4)(x+5)$

$(x-1)(x^2+x-6) \leq 0$ $\wedge$ $14-14x>0 \Rightarrow x<1$

$\wedge$ $x+5>0 \Rightarrow x>-5$

$\wedge$ $x^2-5x+4>0$



$\Rightarrow x \in (-5;-3]$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15В от Андрея Яковлева

(В) $\log_4(6-6x) < \log_4(x^2-5x+4) + \log_4(x+3)$

$\log_4(6(1-x)) < \log_4((1-x)(4-x)) + \log_4(x+3)$

ОДЗ. $\begin{cases} 1-x>0 \\ (1-x)(4-x)>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1-x>0 \\ 4-x>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1-x>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\boxed{-3<x<1}$

Оценка: $1-x>0 \Leftrightarrow 1-x+3>3 \Leftrightarrow 4-x>3 \Rightarrow 4-x>0$.

$\log_4 6 + \log_4(1-x) < \log_4(1-x) + \log_4(4-x) + \log_4(x+3)$

$\log_4 6 < \log_4(4-x) + \log_4(x+3)$

$\log_4 6 < \log_4((4-x)(x+3))$

$6 < (4-x)(x+3)$

$6 < 4x+12-x^2-3x$

$x^2-x-6<0$

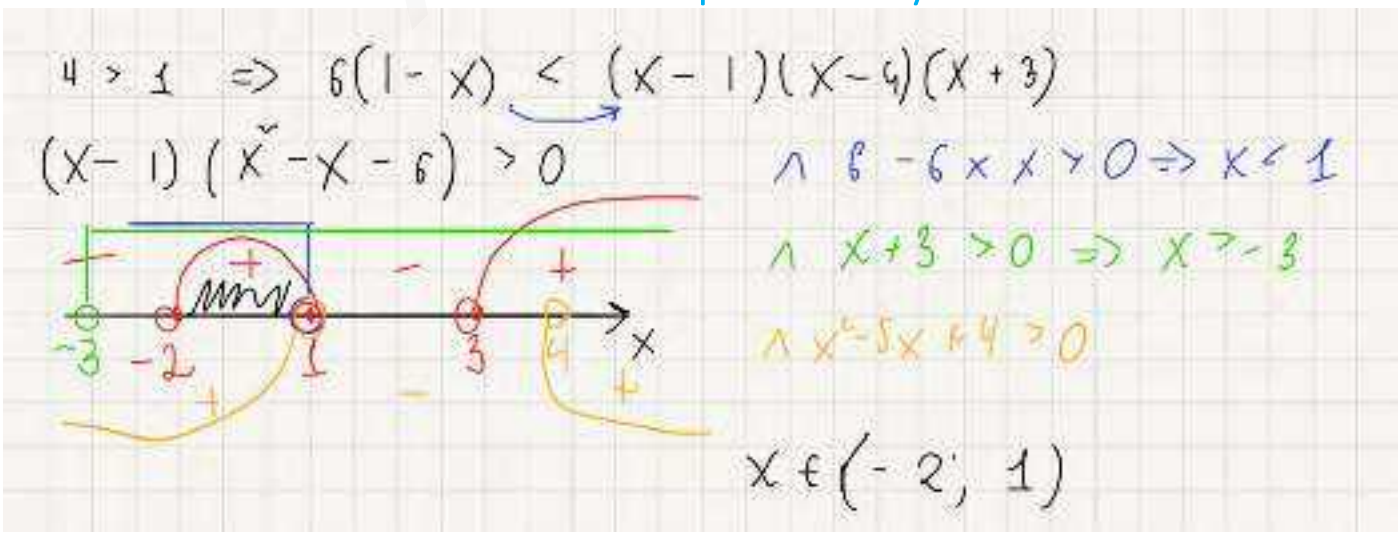
$(x-3)(x+2)<0$

$-2<x<3$

Учтем ОДЗ: $\begin{cases} x\in(-3;1) \\ x\in(-2;3) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2;1)$.

Ответ. $(-2;1)$.

15В от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15C от Андрея Яковлева

$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

(C)

$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}((x^2-6x+5)(x+2))$

$18-9x > (x^2-6x+5)(x+2)$

$18-9x > x^3+2x^2-6x^2-12x+5x+10$

$x^3-4x^2+2x-8<0$

$x^2(x-4)+2(x-4)<0$

$(x-4)(x^2+2)<0 \quad | : (x^2+2)$

$x-4<0$

$x<4$

$\begin{cases} x^2-6x+5>0 \\ x+2>0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)(x-5)>0 \\ x>-2 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>5 \end{array}\right. \\ x>-2 \end{cases}$

$x \in (-2;1) \cup (5;+\infty) \quad (*)$

С учётом ограничений $(*)$, $x \in (-2;1)$.

Ответ. $(-2;1)$.

15D от ФИПИ

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left((4-x)\left(x^2+29\right)\right) \le \log_{\frac{1}{3}}((4-x)(6-x)) + \log_{\frac{1}{3}}(7-x);$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(4-x) + \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+29\right) \le \log_{\frac{1}{3}}(4-x) + \log_{\frac{1}{3}}(6-x) + \log_{\frac{1}{3}}(7-x).$$

Неравенство определено при $x<4$, поэтому при $x<4$ неравенство принимает вид:

$$x^2+29 \ge (6-x)(7-x);\ x^2+29 \ge x^2-13x+42;\ 13x \ge 13,$$

откуда $x \ge 1$. Учитывая ограничение $x<4$, получаем: $1 \le x < 4$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15E от Романа Борисовича Ягубова

$\log_6(108-36x) > \log_6(x^2-11x+24) + \log_6(x+4)$

$6 > 1 \Rightarrow 36(3-x) > (x-3)(x-8)(x+4)$

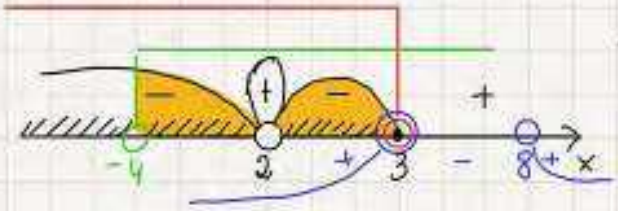
$(x-3)(x^2-4x+4) < 0$

$(x-3)(x-2)^2 < 0$

$\wedge\ 108-36x > 0 \Rightarrow x < 3$

$\wedge\ x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$

$\wedge\ x^2-11x+24 > 0$



Ответ: $(-4;2) \cup (2;3)$

15F от Романа Борисовича Ягубова

$\log_{0,6}(18-18x) \le \log_{0,6}(x^2-6x+5) + \log_{0,6}(x+4)$

$0,6 < 1 \Rightarrow 18(1-x) \ge (x-1)(x-5)(x+4)$

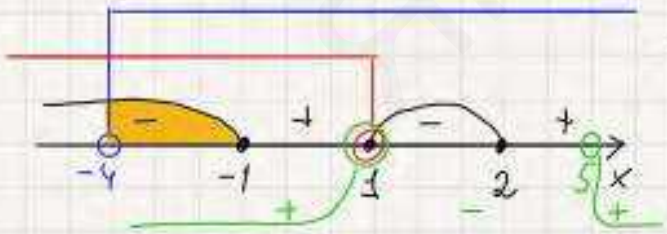
$(x-1)(x^2-x-2) \le 0$

$(x-1)(x+1)(x-2) \le 0$

$\wedge\ 18-18x > 0 \Rightarrow x < 1$

$\wedge\ x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$

$\wedge\ x^2-6x+5 > 0$



Ответ: $(-4;1]$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15G от Романа Борисовича Ягубова

$\log_{0,5}(10-10x) \le \log_{0,5}(x^2-5x+4) + \log_{0,5}(x+3)$

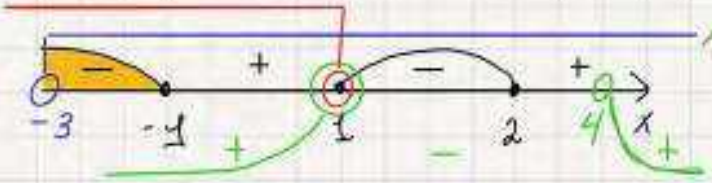
$\log_{0,5}[10(1-x)] \le \log_{0,5}[(x-1)(x-4)(x+3)]$

$0,5 < 1 \Rightarrow 10(1-x) \ge (x-1)(x-4)(x+3)$

$(x-1)(x^2-x-2) \le 0 \quad \wedge \quad 10-10x>0 \Rightarrow x<1$

$(x-1)(x+1)(x-2) \le 0 \quad \wedge \quad x+3>0 \Rightarrow x>-3$

$\wedge \quad x^2-5x+4>0$



Ответ: $(-3;1]$

15G от Ирины Музалевской

15. G $\log_{0,5}(10-10x) \le \log_{0,5}(x^2-5x+4) + \log_{0,5}(x+3)$

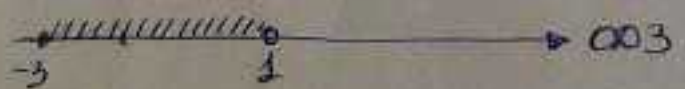
ОДЗ: $\begin{cases} 10-10x>0 \\ x^2-5x+4>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ (x-1)(x-4)>0 \\ x>-3 \end{cases}$ $x \in (-3;1)$

$\log_{0,5}(10-10x) \le \log_{0,5}((x-1)(x-4)(x+3))$

Т.к. $0,5<1$, то: $10(1-x) \ge (x-1)(x-4)(x+3)$

$(x-1)(x^2-x-12+10) \le 0$

$(x-1)(x+1)(x-2) \le 0$



Ответ: $(-3;-1]$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

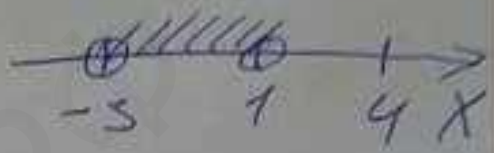
15G от Златы

$\log_{0,5}(10-10x) \le \log_{0,5}(x^2-5x+4) + \log_{0,5}(x+3)$

$\log_{0,5}(10(1-x)) \le \log_{0,5}(x-4)(x-1) + \log_{0,5}(x+3)$

Ограничение на x:

$$\begin{cases} 1-x>0 \\ x-4<0 \\ x+3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<1 \\ x<4 \\ x>-3 \end{cases}$$



$\log_{0,5}(10(1-x)) \le \log_{0,5}(x-4)(x-1)(x+3)$

$10(1-x) \ge (x-4)(x-1)(x+3)$

$(1-x)(10+(x-4)(x+3)) \ge 0$

$(1-x)(x^2-x-2) \ge 0$

$(1-x)(x+1)(x-2) \ge 0$

С учётом ограничений на x получаем $x \in (-3;-1]$

Ответ: $x \in (-3;-1]$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15Н от Андрея Яковлева

Ⓗ $\log_2(4-4x) \geq \log_2(x^2-4x+3)+\log_2(x+2)$

$\log_2(4(1-x)) \geq \log_2((x-1)(x-3))+\log_2(x+2)$

Оценка: $1-x>0 \Leftrightarrow x-1<0$. $\begin{cases} x-1<0 \\ (x-1)(x-3)>0 \end{cases} \Rightarrow x-3<0$

$\log_2 4+\log_2(1-x) \geq \log_2|x-1|+\log_2|x-3|+\log_2(x+2)$

$\log_2 4+\log_2(1-x) \geq \log_2(1-x)+\log_2(3-x)+\log_2(x+2)$

Ограничения на x: $\begin{cases} 1-x>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{-2<x<1}$.

$\log_2 4 \geq \log_2((3-x)(x+2))$; $4 \geq x+6-x^2$; $x^2-x-2 \geq 0$;

$(x+1)(x-2) \geqslant 0$; $\boxed{\begin{array}{l} x \geqslant 2 \\ x \leqslant -1 \end{array}}$

С учётом ограничений на x, $-2<x \leqslant -1$.

Ответ. $(-2;-1]$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15I от Андрея Яковлева

(I) $\log_6(21-7x) \geq \log_6(x^2-8x+15)+\log_6(x+3)$

$\log_6(7(3-x)) \geq \log_6((3-x)(5-x))+\log_6(x+3)$

Оценка: $3-x>0 \Leftrightarrow 5-x>2 \Rightarrow 5-x>0$

$\log_6(7(3-x)) \geq \log_6((3-x)(5-x)(x+3))$

$\begin{cases} 7(3-x) \geq (3-x)(5-x)(x+3) \\ 3-x>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 7 \geq (5-x)(x+3) \\ x<3 \\ x>-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 7 \geq 2x-x^2+15 \\ -3<x<3 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-2x-8 \geq 0 \\ -3<x<3 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-4)(x+2) \geq 0 \\ -3<x<3 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -2 \\ x \geq 4 \end{array}\right. \\ -3<x<3 \end{cases}$ $-3<x\leq -2.$

Ответ. $(-3;-2]$.

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15J от Галины Сосновской

Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{3}}(18-9x)<\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+3)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

Решение:

Ограничения на переменную x: $\begin{cases}18-9x>0,\\ x^2-6x+3>0,\\ x+2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}-2<x<2,\\ x>3+\sqrt{6},\\ x<3-\sqrt{6};\end{cases}$ $x\in(-2;3-\sqrt{6})$

Сравним: $3-\sqrt{6}=\sqrt{9}-\sqrt{6}>0$, и $3-\sqrt{6}<1$, $\sqrt{4}<\sqrt{6}$;

$0<3-\sqrt{6}<1$;

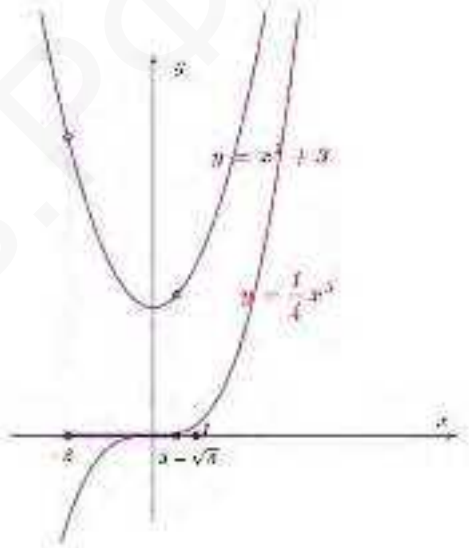
$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x)<\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+3)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$

$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x)<\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+3)(x+2)$

$18-9x>(x^2-6x+3)(x+2)$; $18-9x>x^3-4x^2-9x+6$;

$x^3-4x^2-12<0$, $\frac{1}{4}x^3<x^2+3$;

Обозначим: $f(x)=\frac{1}{4}x^3$ и $g(x)=x^2+3$;



Неравенство $f(x)<g(x)$ выполняется при любых значениях x из промежутка $x\in(-2;3-\sqrt{6})$.

Ответ: $x\in(-2;3-\sqrt{6})$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15К от Натальи Юрьевны

15. *К.* $\log_4(6-6x) \geq \log_4(x^2-5x+4) - \log_4(x+3) \Leftrightarrow$

$x_1 = 1; x_2 = 4$ по обратной теореме Виета

$\Leftrightarrow \log_4 6(1-x) + \log_4(x+3) \geq \log_4(x-1)(x-4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 6(1-x)(x+3) \geq \log_4(x-1)(x-4), \\ 1-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(1-x)(x+3) \geq -(1-x)(x-4), \\ x<1, \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$y = \log_4 t$ – возрастающая функция; $1-x>0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+18 \geq 4-x, \\ -3<x<1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq -14, \\ -3<x<1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ -3<x<1; \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 1.$

Ответ: $[-2; 1)$.

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15L от Maksimus

$\log_{\frac{1}{3}}(18-9x) < \log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+8) + \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

$1/3 < 1 \Rightarrow$ неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 18-9x > (x^2-6x+8)(x+2) & (1) \\ x+2>0 & (2) \\ x^2-6x+8>0 & (3) \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

(2) $x > -2$

3) $(x-4)(x-2) > 0$

$x \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

$\begin{cases} 2) \\ 3) \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 2) \cup (4; +\infty)$.

(1): $(x-4)(x-2)(x+2) < -9(x-2)$

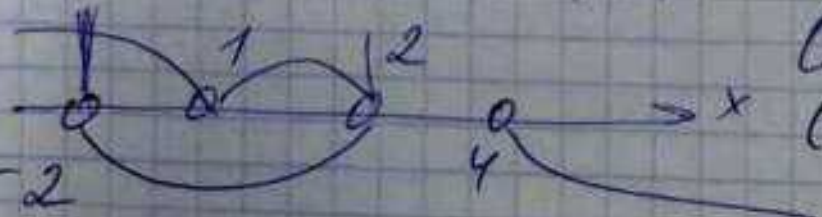
$(x-2)((x-4)(x+2)+9) < 0$

$(x-2)(x^2-2x+1) < 0$

$(x-2)(x-1)^2 < 0$

3): $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$.

$(\Leftrightarrow)$



Ответ: $(-2;1) \cup (1;2)$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15M от Натальи Юрьевны

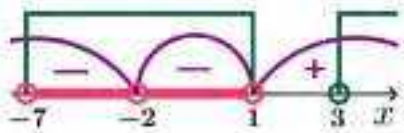
15. M. $\log_5(25-25x) > \log_5(x^2-4x+3) + \log_5(x+7) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_5 25(1-x) > \log_5(x-1)(x-3) + \log_5(x+7) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 25(1-x) > \log_5(x-1)(x-3)(x+7), \\ x+7>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25(1-x) > (x-1)(x-3)(x+7), \\ x > -7, \\ (x-1)(x-3) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$y = \log_5 t$ – возрастающая функция

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+4x-21+25) < 0, \\ \left[\begin{array}{l} -7 < x < 1, \\ x > 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)^2 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} -7 < x < 1, \\ x > 3; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow x \in (-7;\ -2) \cup (-2;\ 1).$

Ответ: $(-7;\ -2) \cup (-2;\ 1)$.

15N от Натальи Юрьевны

15. N. $\log_{0,1}(6-6x) \le \log_{0,1}(x^2-4x+3) + \log_{0,1}(x+4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{0,1} 6(1-x) \le \log_{0,1}(x-1)(x-3) + \log_{0,1}(x+4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{0,1} 6 + \log_{0,1}(1-x) \le \log_{0,1}|x-1| + \log_{0,1}|x-3| + \log_{0,1}(x+4) \Leftrightarrow$

так как $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$, то $x-1<0, x-3<0 \Leftrightarrow 3-x>0$

$\Leftrightarrow \log_{0,1} 6 + \log_{0,1}(1-x) \le \log_{0,1}(1-x) + \log_{0,1}(3-x) + \log_{0,1}(x+4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,1} 6 \le \log_{0,1}(3-x)(x+4), \\ x+4>0, \\ x<1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \ge 3x+12-x^2-4x, \\ x > -4, \\ x<1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6 \ge 0, \\ -4 < x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$y = \log_{0,1} t$ – убывающая функция

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) \ge 0, \\ -4 < x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x \le -3.$

Ответ: $(-4;\ -3]$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

15О от Людмилы Скрипка

I способ

15.О $\log_{0,3}(12-6x) \le \log_{0,3}(x^2-6x+8)+\log_{0,3}(x+3)$

$\log_{0,3}(6(2-x)) \le \log_{0,3}((x-2)(x-4))+\log_{0,3}(x+3)$

$\log_{0,3}(6(2-x)) \le \log_{0,3}((2-x)(4-x))+\log_{0,3}(x+3)$

$$\begin{cases} 2-x>0 \\ 4-x>0 \\ x+3>0 \\ 6(2-x) \ge (2-x)(4-x)(x+3) \end{cases}$$ учитывая, что $y=\log_{0,3} t$ убывает на R_+

$$\begin{cases} x<2 \\ x<4 \\ x>-3 \\ (2-x)(6-(4-x)(x+3)) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3<x<2 \\ (2-x)(6-4x+x^2-12+3x) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3<x<2 \\ (2-x)(x^2-x-6) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3<x<2 \\ (x-2)(x+2)(x-3) \le 0 \end{cases}$$

$-3; 2.$

$-2; 2; 3.$

$x \in (-3; -2]$

Ответ: $(-3; -2]$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

II способ

15.0 $\log_{0,3}(12-6x) \le \log_{0,3}(x^2-6x+8) + \log_{0,3}(x+3)$

1) ОДЗ: $\begin{cases} 12-6x>0 \\ x^2-6x+8>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<2 \\ (x-2)(x-4)>0 \\ x>-3 \end{cases}$

$\begin{cases} -3<x<2 \\ (x-2)(x-4)>0 \end{cases}$

$x \in (-3;2)$

2) $\log_{0,3}(6(2-x)) \le \log_{0,3}((x-2)(x-4)(x+3))$

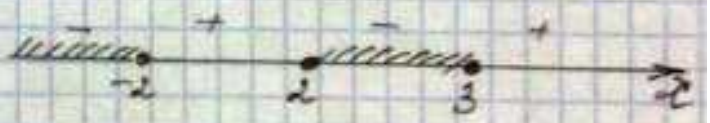
$6(2-x) \ge (x-2)(x-4)(x+3)$, т.к. $y=\log_{0,3} t$ убывает на $(0;+\infty)$

$(x-2)(x-4)(x+3)+6(x-2) \le 0$

$(x-2)(x^2-4x+3x-12+6) \le 0$

$(x-2)(x^2-x-6) \le 0$

$(x-2)(x+2)(x-3) \le 0$



$x \in (-\infty;-2] \cup [2;3]$.

3) С учётом ОДЗ получим:

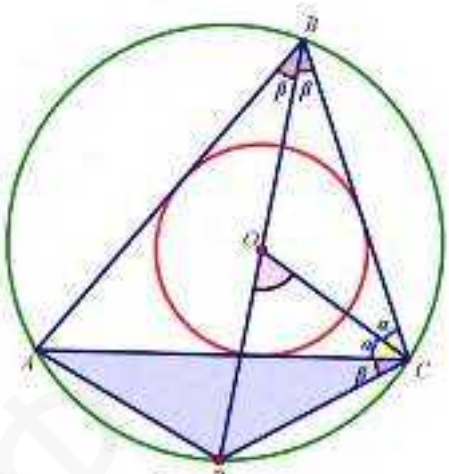
$x \in (-3;-2]$

Ответ: $(-3;-2]$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 16

16А от Елены Ильиничны Хажинской



Решение.

а) O – центр вписанной в ΔABC окружности, следовательно CO и BO – биссектрисы углов ACB и ABC соответственно.

Пусть $\angle BCO = \angle OCA = \alpha, \angle CBO = \angle ABO = \beta$;

$\angle PCA = \angle ABP = \frac{1}{2} \cup AP = \beta$ как вписанные. Тогда $\angle PCO = \alpha + \beta$,

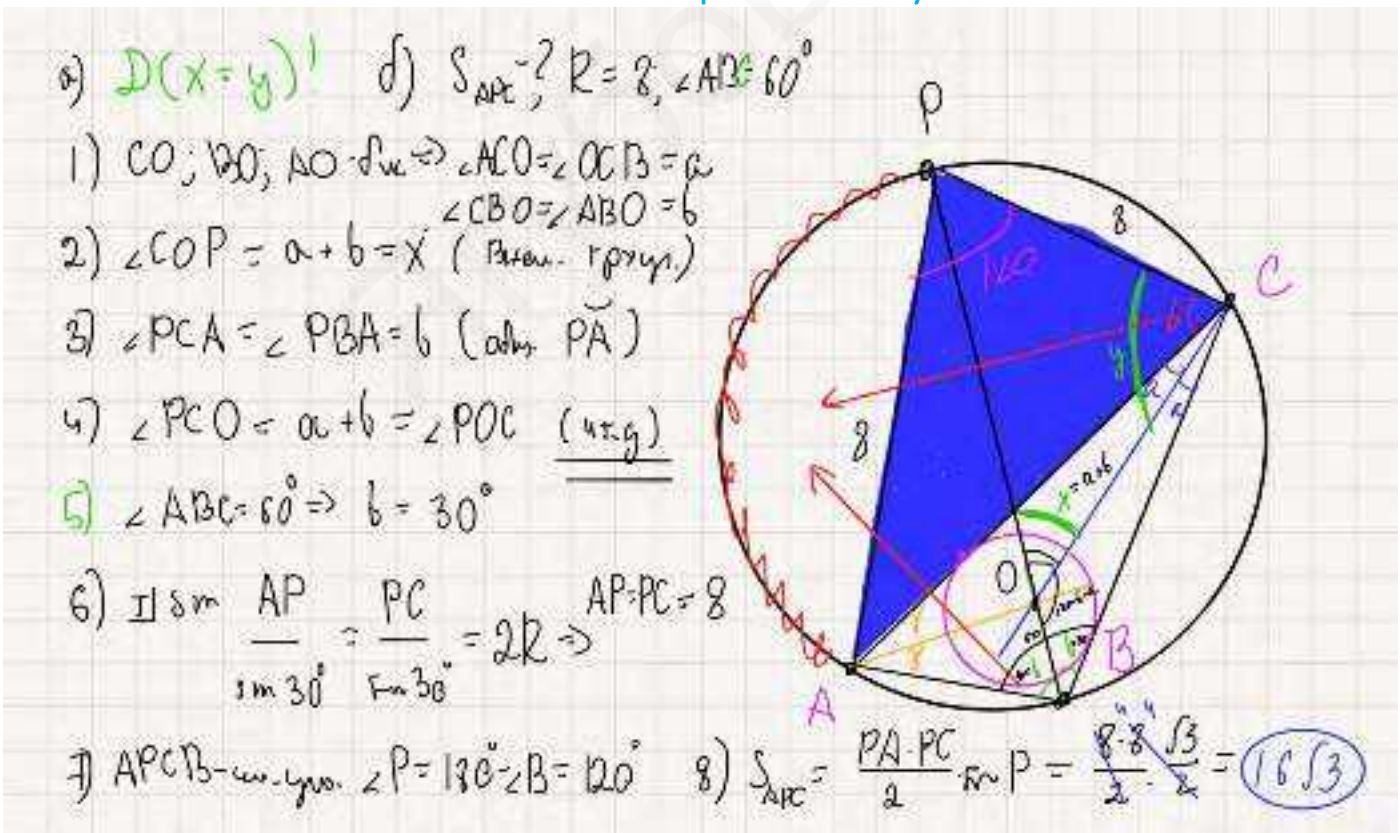
$\angle POC = \alpha + \beta$ как внешний угол $\Delta BOC \Rightarrow \angle POC = \angle PCO$.

б) $\cup AP = \cup CP \Rightarrow AP = CP$; $\angle ACP = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$.

По т. синусов $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R, \frac{AP}{\sin\angle ACP} = 2R$, т.е. $AC = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}, AP = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8 = PC$ и

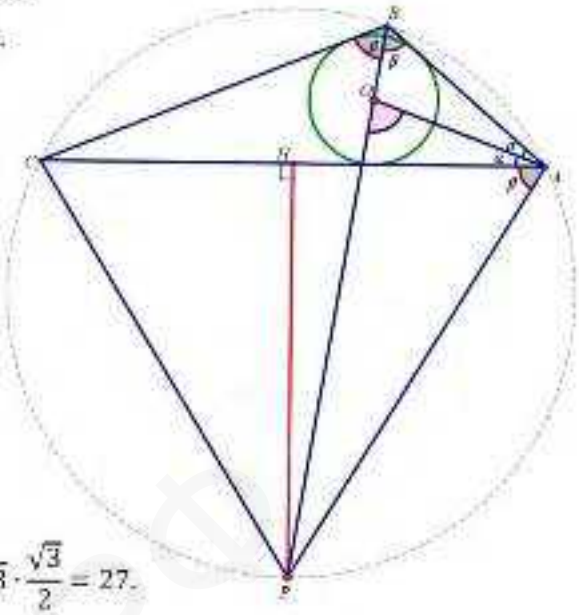
$S_{APC} = \frac{1}{2} AC \cdot PC \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16\sqrt{3}$.

16А от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

16В от Елены Ильиничны Хажинской



а) O – центр вписанной в ΔABC окружности, следовательно, AO и BO – биссектрисы углов BAC и ABC соответственно.

Пусть $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$, $\angle CBO = \angle ABO = \beta$;

$\angle PAC = \angle CBP = \frac{1}{2} \cup CP = \beta$ как вписанные. Тогда

$\angle PAO = \alpha + \beta$.

$\angle POA = \alpha + \beta$ как внешний угол $\Delta AOB \Rightarrow \angle PAO = \angle POA$

Тогда ΔAPO – равнобедренный и $OP = AP$.

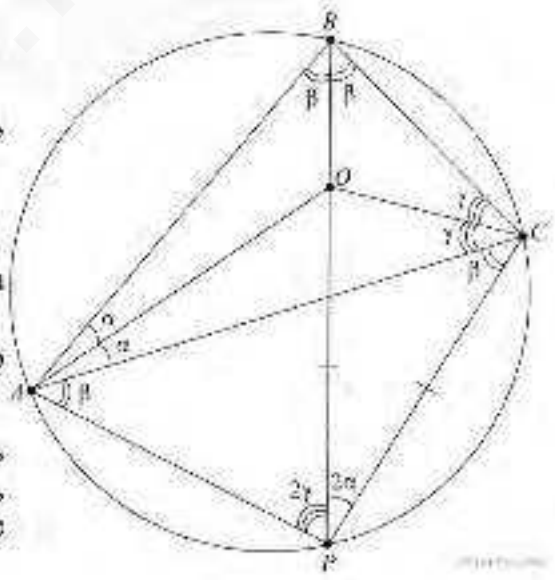
б) $\angle ABC = 120°$, тогда $\angle APC = 180° - 120° = 60°$;

$\angle PAC = \angle PBA = 60° \Rightarrow \Delta APC$ – равносторонний.

Проведем $PH \perp AC$. По т. синусов $\frac{PC}{\sin\angle PAC} = 2R$;

$\frac{PC}{\sin 60°} = 36$; $PC = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$; $PH = PC \cdot \sin 60° = 18\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 27$.

16В от Решу ЕГЭ



а) Обозначим углы треугольника ABC: $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Заметим, что $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$. $\angle BPA = \angle ACB = 2\gamma$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу. Аналогично $\angle CAP = \angle CBP = \beta$. Тогда $\angle AOP = 180° - \alpha - \beta - 2\gamma = \alpha + \beta$. Но $\alpha + \beta = \angle OAP$, следовательно, треугольник AOP — равнобедренный, а тогда $AP = OP$.

б) Сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна $180°$, следовательно, $\angle APC = 180° - 120° = 60°$. $AP = PC$, как хорды, стягивающие равные дуги. Следовательно, треугольник APC — равносторонний. Искомое расстояние d равно его высоте: $d = \frac{\sqrt{3}AC}{2}$.

По теореме синусов,

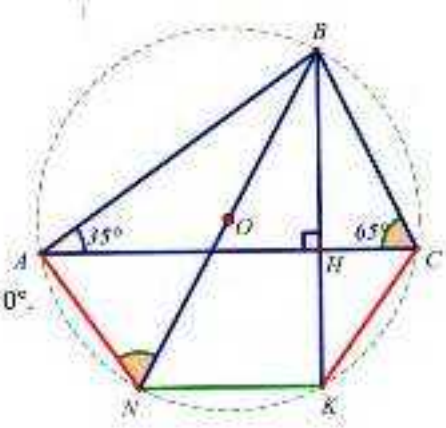
$$AC = 2R\sin\widehat{ABC} = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}.$$

Следовательно, $d = \frac{\sqrt{3} \cdot 18\sqrt{3}}{2} = 27$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

16С от Елены Ильиничны Хажинской

Решение.



а) $\angle ANB = \angle ACB = 65^\circ = \frac{1}{2}\cup AB$ как вписанные; BN – диаметр окружности $\Rightarrow \angle BAN = 90^\circ$, тогда $\angle ABN = 25^\circ$.

ΔBHC прямоугольный, $\angle CBH = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ \Rightarrow$

$\angle ABN = \angle CBK$. А это – вписанные углы $\Rightarrow \cup AN = \cup CK$ и $AN = CK$.

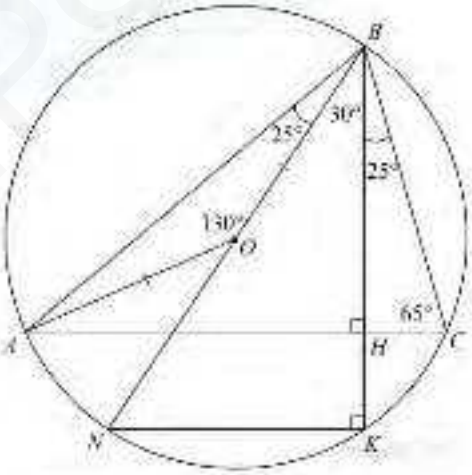
б) В ΔABC $\angle ABC = 180^\circ - (35^\circ + 65^\circ) = 80^\circ$; $\angle NBK = 80^\circ - 2 \cdot 25^\circ = 30^\circ$.

ΔBKN – прямоугольный, $BN = 2R \Rightarrow KN = \frac{1}{2}BN = R = 12$.

Ответ: **12**.

16С от Решу ЕГЭ

Решение.



а) Равные дуги стягивают равны хорды, поэтому достаточно доказать, что $\angle ABN = \angle KBC$. Сумма острых углов прямоугольного треугольника BHC равна 90°, поэтому $\angle HBC = 25^\circ$. Угол AOB равен 130° так как центральный угол AOB в два раза больше вписанного угла ACB, опирающегося на ту же дугу. В равнобедренном треугольнике AOB ($AO = OB$ как радиусы) углы при основании равны, поэтому $\angle ABO = 25^\circ$. Тем самым, $\angle ABN = \angle KBC = 25^\circ$. Требуемое доказано.

б) Заметим, что $\angle ABC = 80^\circ$. Тогда

$$\angle NBK = \angle ABC - \angle ABN - \angle KBC = 80^\circ - 25^\circ - 25^\circ = 30^\circ.$$

Далее, $\angle NKB = 90^\circ$ как угол, опирающийся на диаметр. Диаметр равен удвоенному радиусу: $BN - 24$. Тогда $KN = \frac{1}{2}BN = 12$ как катет, лежащий против угла в 30° в прямоугольном треугольнике BKN.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

16D от ФИПИ

Решение.

а) Точки M и N лежат на окружности диаметром BC, поэтому $\angle ANM = 180^\circ - \angle MNC = \angle ABC$. Значит, треугольники ANM и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{AM}{AC} = \cos\angle BAC = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ANM, равен $\frac{1}{2}AO$.

Точки M и N лежат на окружности диаметром AH, поэтому $AH = AO$.

б) Пусть прямые AH и BC пересекаются в точке K, а точка L — середина стороны AC, тогда

$$\angle AKB = 90^\circ,\ \angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cdot 2\angle ABC = \angle ABC = 45^\circ.$$

Значит,

$$\angle OAL = 90^\circ - \angle AOL = 45^\circ,\ \angle BAK = 90^\circ - \angle ABC = 45^\circ;$$
$$\angle OAH = \angle BAK + \angle OAL - \angle BAC = 30^\circ.$$

Площадь треугольника AHO равна

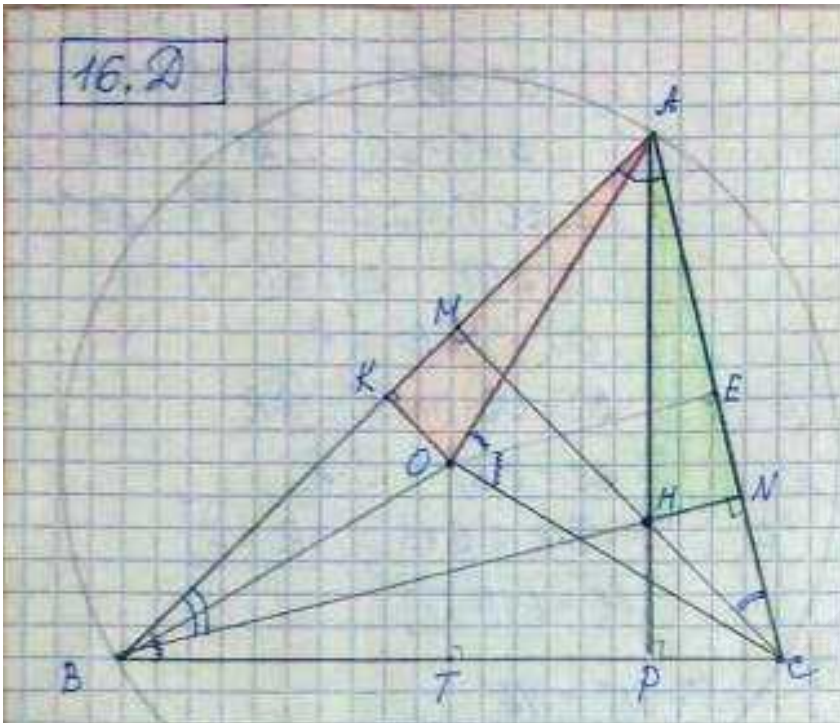
$$\frac{AO\cdot AH\cdot \sin\angle OAH}{2} = \frac{AO^2\cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{BC^2\cdot \sin 30^\circ}{8\sin^2 60^\circ} = 9.$$

Ответ: б) 9.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

16D от Людмилы Скрипка

16.D

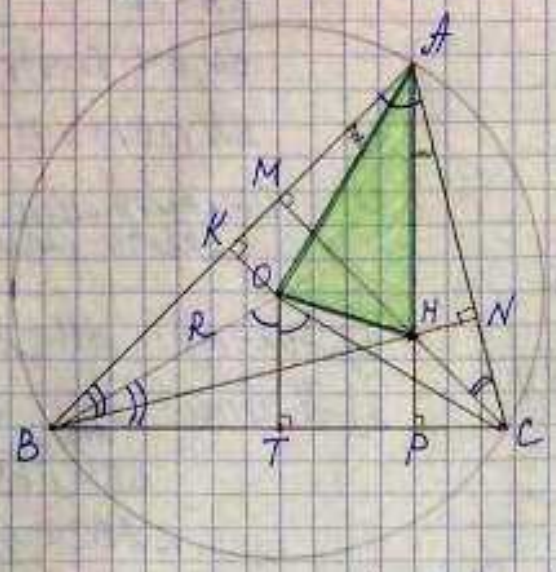


Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный
$\angle A = 60^\circ$
BN, CM - высоты
$BN \cap CM = H$
O - центр опис. окр-ти около $\triangle ABC$

а) Док-ть: $AH = AO$
б) Найти: S_{AHO}, если $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ$.

а) O - центр опис. окр., пусть $OA = OB = OC = R$.
$OK \perp AB$, $OE \perp AC$, $OT \perp BC$.
Точки K, E, T - середины сторон AB, AC, BC соотв.
$\triangle ACM$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle ACM = 30^\circ$, $AM = \frac{1}{2}AC = AE$
$\triangle ABN$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle ABN = 30^\circ$, $AN = \frac{1}{2}AB = AK$ $\boxed{AN = AK}$
Пусть $\angle ABC = \alpha$, $\cup AC = 2\alpha$, $\angle AOC = 2\alpha$, $\angle AOE = \angle COE = \alpha$
$\triangle OAE$: $\angle AOE = \alpha$, $\angle OAE = 90^\circ - \alpha$
$\angle OAK = \angle A - \angle OAE = 60^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha - 30^\circ$ $\boxed{\angle OAK = \alpha - 30^\circ}$
$\triangle ABC$: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \alpha$, $\angle C = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$.
$\triangle APC$: $\angle C = 120^\circ - \alpha$, $\angle CAP = 90^\circ - (120^\circ - \alpha) = \alpha - 30^\circ$. $\boxed{\angle HAN = \alpha - 30^\circ}$
Прямоугольные треугольники AOK и AHN будут равны по катету ($AN = AK$) и острому углу ($\angle OAK = \angle HAN$), значит, $AO = AH$ ч.т.д.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях



б) $BC = 6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 45^\circ = \alpha$,

$\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BOC = 120^\circ$.

$\angle BOT = \angle COT = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$.

$\triangle BOT$: $\angle OBT = 30^\circ$

$OT = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}R$

$BT = OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

$BC = 2 \cdot BT = \sqrt{3} \cdot R$,

$\sqrt{3} \cdot R = 6\sqrt{3}$, $\boxed{R = 6}$

$\boxed{AO = OH = 6}$

$\angle OAK = \angle HAN = \alpha - 30^\circ = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

$\angle OAH = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$. $\boxed{\angle OAH = 30^\circ}$

$\triangle AHO$: $S_{AHO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot AH \cdot \sin \angle OAH$

$S_{AHO} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 9$.

$\boxed{S_{AHO} = 9}$

Ответ: б) 9

Заметим, что R можно было найти по теореме синусов для $\triangle ABC$.

$\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$; $\frac{6\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2R$, $R = 6$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 17

17А от Елены Ильиничны Хажинской

$S = 14$ млн. руб. – сумма кредита, $a = \frac{14}{n}$ (млн. руб.) – сумма, на которую уменьшается долг в июле, где n – срок кредита в годах.

	Долг на январь	Выплата	Остаток долга
1	$1{,}1S$	$0{,}1S + a$	$S - a$
2	$1{,}1(S - a)$	$0{,}1(S - a) + a$	$S - 2a$
⋮			
n-1	$1{,}1(S - (n-2)a)$	$0{,}1(S - (n-2)a) + a$	$S - (n-1)a$
n	$1{,}1(S - (n-1)a)$	$0{,}1(S - (n-1)a) + a$	0

Последний платеж – наименьший, следовательно, $0{,}1\left(14 - (n-1)\cdot\frac{14}{n}\right) + \frac{14}{n} = 3{,}85$;

$0{,}1\left(\frac{14n - 14n + 14}{n}\right) + \frac{14}{n} = 3{,}85$; $\frac{15{,}4}{n} = 3{,}85$; $n = 4$. Тогда $a = \frac{14}{4} = 3{,}5$ и общая сумма выплат равна $14 + 0{,}1(S + S - a + S - 2a + S - 3a) = 14 + 0{,}1(4S - 6a) = 14 + 0{,}1(56 - 21) = 17{,}5$

Ответ:17,5 млн. рублей.

17А от ФИПИ

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$14;\ \frac{14(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{14\cdot 2}{n};\ \frac{14}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 10%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$15{,}4;\ \frac{15{,}4(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{15{,}4\cdot 2}{n};\ \frac{15{,}4}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1{,}4+\frac{14}{n};\ \frac{1{,}4(n-1)+14}{n};\ \ldots;\ \frac{1{,}4\cdot 2+14}{n};\ \frac{1{,}4+14}{n}.$$

Получаем: $\frac{15{,}4}{n} = 3{,}85$, откуда $n = 4$. Значит, всего следует выплатить

$$14+1{,}4\left(1+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)=14+1{,}4\cdot 2{,}5=17{,}5 \text{ (млн рублей).}$$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17В от Елены Ильиничны Хажинской

Пусть S – сумма кредита, $a = \frac{S}{15}$ сумма, на которую уменьшается долг в июле каждого года.

	Долг на январь	Выплата	Остаток долга в июле
1	$(1+0{,}01r)S$	$0{,}01rS + a$	$S - a$
2	$(1+0{,}01r)(S-a)$	$0{,}01r(S-a) + a$	$S - 2a$
⋮			
14	$(1+0{,}01r)(S-13a)$	$0{,}01r(S-13a) + a$	$S - 14a$
15	$(1+0{,}01r)(S-14a)$	$0{,}01r(S-14a) + a$	0

За весь период было выплачено с одной стороны $S + 0{,}15S$, а с другой стороны

$$S + 0{,}01r(S + S - a + S - 2a + \cdots + S - 14a) = S + 0{,}01r\left(15S - a(1 + 2 + \cdots + 14)\right) =$$

$$= S + 0{,}01r\left(15S - \frac{S}{15} \cdot \frac{1+14}{2} \cdot 14\right) = S + 0{,}08rS. \text{ Тогда } S + 0{,}15S = S + 0{,}08rS;\ 0{,}08r = 0{,}15;$$

$r = 1{,}875$.

Ответ:1,875%.

17В от Решу ЕГЭ

Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда переплата за первый год равна $\frac{x}{100}S_0$. По условию, ежегодный долг перед банком должен уменьшиться равномерно. Этот долг состоит из двух частей: постоянной ежегодной выплаты, равной $S_0/15$, и ежегодной равномерно уменьшающейся выплаты процентов, равной

$$\frac{x}{100}S_0;\ \frac{14}{15} \cdot \frac{x}{100}S_0,\ \ldots,\ \frac{2}{15} \cdot \frac{x}{100}S_0,\ \frac{1}{15} \cdot \frac{x}{100}S_0.$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, найдём полную переплату по кредиту:

$$\frac{x}{100}S_0\left(1 + \frac{14}{15} + \ldots + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}\right) - \frac{x}{100}S_0 \cdot \frac{1 + \frac{1}{15}}{2} \cdot 15 - \frac{2x}{25}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 15% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0{,}08xS_0 = 0{,}15S_0 \Leftrightarrow x = 1.875.$$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17С от Елены Ильиничны Хажинской

Пусть $S = 6$(млн. руб.) – сумма кредита, $a = \frac{S}{15} = 0{,}4$(млн. руб.)сумма, на которую уменьшается долг в июле каждого года.

	Долг на январь	Выплата	Остаток долга в июле
1	$(1+0{,}01r)S$	$0{,}01rS + a$	$S - a$
2	$(1+0{,}01r)(S-a)$	$0{,}01r(S-a) + a$	$S - 2a$
⋮			
14	$(1+0{,}01r)(S-13a)$	$0{,}01r(S-13a) + a$	$S - 14a$
15	$(1+0{,}01r)(S-14a)$	$0{,}01r(S-14a) + a$	0

Так как наибольший платеж по кредиту – первый, а наименьший – последний, то

$$\begin{cases} 0{,}01rS + a \le 1{,}9 \\ 0{,}01r(S-14a) + a \ge 0{,}5 \end{cases} ; \begin{cases} 0{,}06r \le 1{,}5 \\ 0{,}01r(6-5{,}6) \ge 0{,}1 \end{cases} ; \begin{cases} r \le 25 \\ r \ge 25 \end{cases}, \text{откуда } r = 25.$$

Ответ:25%.

17С от Решу ЕГЭ

Наибольший платеж за пользование кредитом будет выплачен в первый год, а наименьший — в последний. Долг перед банком по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно, ежегодно уменьшаясь на одну пятнадцатую. Поэтому первый платеж составит одну пятнадцатую от 6 миллионов (возврат первой тела долга) и процент за их использование: $\frac{1}{15} \cdot 6 + \frac{x}{100} \cdot 6$. Последний платеж также составит одну пятнадцатую от 6 миллионов (возврат последней части тела долга) и процент за использование этой суммы в течение последнего года: $\frac{1}{15} \cdot 6 + \frac{x}{100} \cdot \frac{6}{15}$. Поскольку первая из найденных величин не больше 1,9 млн руб, а вторая не меньше 0,5 млн руб, получаем два линейных неравенства, откуда, соответственно, находим: $x \le 25$ и $x \ge 25$. Тогда $x = 25$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17D от Аиды Ахнавовны Анисимовой

Пусть долг равномерно уменьшался каждый месяц на a тыс. руб. Тогда сумма кредита $S = 24a$ (т. руб).

Долг перед банком уменьшается равномерно:

$24a;\ 23a,\ \dots,\ 2a;\ a$.

Тогда ежемесячные выплаты, будут следующими:

$(1{,}02 \cdot 24a - 23a);\ (1{,}02 \cdot 23a - 22a),\ \dots,\ (1{,}02 \cdot 2a - a);\ 1{,}02 \cdot a$,

или

$(0{,}02 \cdot 24a + a),\ (0{,}02 \cdot 23a + a),\ \dots,\ (0{,}02a + a)$.

Тогда суммарные выплаты составят

$$0{,}02(24a + 23a + \dots + a) + 24a = 0{,}02 \cdot \frac{25a}{2} \cdot 24 + 24a =$$

$$= 0{,}25S + S = 1{,}25S$$

По условию общие выплаты равны 1000 тыс. руб,

т.е $1{,}25S = 1000$

$S = 800$ (тыс руб).

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17D от Златы

Пусть S (руб) – сумма кредита

	выплата процентов	выплата долга
(1)	$S \cdot 0{,}02$	$\frac{S}{24}$
(2)	$\frac{23}{24} S \cdot 0{,}02$	$\frac{S}{24}$
(3)	$\frac{22}{24} \cdot S \cdot 0{,}02$	$\frac{S}{24}$
⋮	⋮	⋮
(24)	$\frac{1}{24} S \cdot 0{,}02$	$\frac{S}{24}$

Просуммируем все эти выплаты и найдём общую сумму выплат:

$$S \cdot 0{,}02 + \frac{23}{24} S \cdot 0{,}02 + \frac{22}{24} S \cdot 0{,}02 + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{24} S \cdot 0{,}02 + \frac{S}{24} \cdot 24 =$$

$$= \frac{S \cdot 0{,}02}{24} (24 + 23 + \dots + 1) + S =$$

$$= \frac{S \cdot 0{,}02}{24} \cdot \frac{25}{2} \cdot 24 + S = 1{,}25\,S,$$ тогда

$$1{,}25\,S = 1000{,}000$$

$$S = 800{,}000 \text{ (руб)}$$

Ответ: 800,000 руб

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17E от Аиды Ахнавовны Анисимовой

17 E

Пусть в июле каждого года долг на a млн руб
меньше долга на июль предыдущего года.
Если срок – n лет, то сумма кредита равна
an млн. руб., причем an = 28.
Долг уменьшается равномерно:
an ; a(n-1), ..., 2a ; a.
Каждый январь долг, увеличиваясь на 25%,
составит: 1,25·an ; 1,25a(n-1) ..., 1,25a.
Платежи:
(1,25an – a(n-1)), (1,25a(n-1) – a(n-2)), ..., 1,25a,
или: (0,25an + a), (0,25a(n-1) + a), ..., (0,25a + a).
Наибольший платеж – первый, по условию
задачи $0,25an + a = 9$
$0,25 \cdot 28 + a = 9$
$a = 2$; $n = 14$.
Общая сумма выплат:
$0,25(28 + 26 + ... + 2) + 28 = \frac{1}{4} \cdot \frac{30}{2} \cdot 14 + 28 =$
$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 7 + 28 = 52,5 + 28 = 80,5$

Ответ: 80,5 млн руб

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17F от ФИПИ

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$7;\ \frac{7(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{7\cdot 2}{n};\ \frac{7}{n};\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$8{,}4;\ \frac{8{,}4(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{8{,}4\cdot 2}{n};\ \frac{8{,}4}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1{,}4+\frac{7}{n};\ \frac{1{,}4(n-1)+7}{n};\ \ldots;\ \frac{1{,}4\cdot 2+7}{n};\ \frac{1{,}4+7}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$7+1{,}4\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=7+\frac{1{,}4(n+1)}{2}\ \text{(млн рублей).}$$

Общая сумма выплат равна 17,5 млн рублей, поэтому $n=14$.

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17F от Людмилы Скрипка

17.F $S = 7$ млн. руб – сумма кредита

n лет, $n \in \mathbb{N}$

$20\% = 0{,}2 = \frac{1}{5}$

17,5 млн. руб. – общая сумма выплат.

x млн. руб – сумма, на которую долг равномерно уменьшается.

	Выплаты постоянные	Выплаты по процентам (проценты банку)
1.	x	$0{,}2S$
2.	x	$0{,}2(S-x)$
3.	x	$0{,}2(S-2x)$
n	x	$0{,}2(S-(n-1)x)$
	$x \cdot n = S$	$0{,}2(S \cdot n - x(1+2+\dots+(n-1))) =$

$$= 0{,}2\left(Sn - x \cdot \frac{(1+n-1)(n-1)}{2}\right) =$$

$$= 0{,}2\left(Sn - xn \cdot \frac{n-1}{2}\right) = 0{,}2\left(Sn - S \cdot \frac{n-1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}1(2Sn - Sn + S) = 0{,}1(Sn + S)$$

Общая сумма выплат 17,5 млн. руб.

$$S + 0{,}1(Sn + S) = 17{,}5$$

$$7 + 0{,}1(7n + 7) = 17{,}5$$

$$0{,}1(7n + 7) = 10{,}5$$

$$7n + 7 = 105$$

$$7n = 98$$

$$n = 14.$$

Кредит был взят на 14 лет.

Ответ: 14

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

17F от Аиды Ахнавовны Анисимовой

17F

Пусть в июле каждого года долг на a млн руб меньше долга на июль предыдущего года.

Если срок n лет, то сумма кредита равна a_n млн руб, причем $a_n = 7$.

Т.к. долг уменьшается равномерно, то на июль каждого года долг составит:

a_n ; $a(n-1)$; ... , $2a$; a

В январе каждого года долг возрастает на 20%

$1{,}2a_n$; $1{,}2a(n-1)$; ... , $1{,}2a$

Тогда суммы выплат составят:

$(1{,}2a_n - a(n-1))$; $(1{,}2a(n-1) - a(n-2))$; ... ; $1{,}2a$.

Сложив все выплаты, получим:

$$1{,}2a(n + n-1 + \dots + 1) - a(n-1 + n-2 + \dots + 1) =$$

$$= 1{,}2a \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n - a \cdot \frac{n-1+1}{2} \cdot (n-1) =$$

$$= 0{,}6 \cdot a_n (n+1) - 0{,}5 \cdot a_n (n-1) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 7 (n+1) - 0{,}5 \cdot 7 (n-1) = 0{,}7n + 7{,}7.$$

По условию, $0{,}7n + 7{,}7 = 17{,}5$

$0{,}7n = 9{,}8$

$n = 14$

Ответ: 14 лет

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 18

18А от Елены Ильиничны Хажинской

Решение.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-4x+a=0\ (*) \\ 5x^2-6ax+a^2\neq 0 \end{cases}$.

Квадратное уравнение $(*)$ имеет два различных корня, когда $\frac{D}{4}=4-a>0$, т. е. $a<4$

$5x^2-6ax+a^2\neq 0$ т. е. $x\neq a, x\neq \frac{a}{5}$.

Если $x=a$, то $a^2-4a+a\neq 0$; $a^2-3a\neq 0$; $a\neq 0$; $a\neq 3$.

Если $x=\frac{a}{5}$, то $\frac{a^2}{25}-\frac{4a}{5}+a\neq 0$; $a^2+5a\neq 0$; $a\neq 0$; $a\neq -5$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

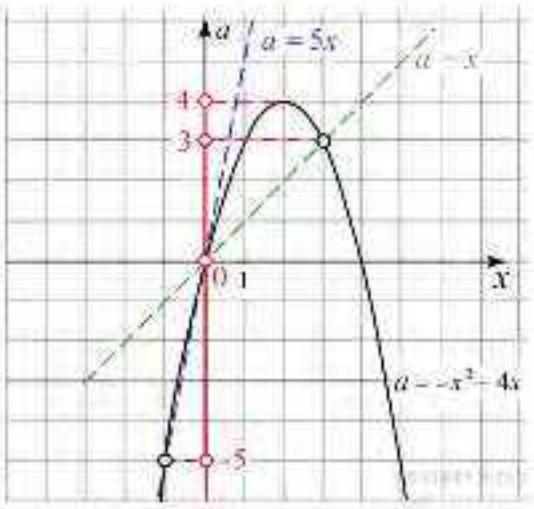
$a\in(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(-5;0)\cup(0;3)\cup(3;4)$

18А от Решу ЕГЭ

$$\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+a=0,\\5x^2-6ax+a^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x^2+4x,\\(5x-a)(x-a)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x^2+4x,\\a\neq x,\\a\neq 5x.\end{cases}$$

Изобразим решение в системе координат xOa. Графиком системы, а значит, и графиком исходного уравнения является парабола с выколотыми точками.



Ординаты точек пересечения параболы $a=-x^2+4x$ и прямой $a=x$ найдём из уравнения $a=-a^2+4a$. Получаем $a=0$ или $a=3$.

Ординаты точек пересечения параболы $a=-x^2+4x$ и прямой $a=5x$ найдём из уравнения $a=-\frac{a^2}{25}+\frac{4a}{5}$. Получаем $a=0$ или $a=-5$.

Ровно два решения исходное уравнение имеет при $a<-5$, $-5<a<0$, $0<a<3$, $3<a<4$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18А от Романа Борисовича Ягубова

1) $x^2 - 4x + a = 0$

$D = \left(2\sqrt{4-a}\right)^2$

$a < 4$ (два реш.)

$5x^2 - 6ax + a^2 = 0$

$D = 36a^2 - 20a^2 = (4a)^2$

$x_{1,2} \neq \frac{6a \pm 4a}{10} = a;\ \frac{a}{5}$

2) $x_1 \neq a \Rightarrow a^2 - 3a \neq 0$

$a \neq 0;\ 3$ (нули квадр.)

3) $x_1 \neq \frac{a}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{25} - \frac{4a}{5} + a \neq 0$ (умножим на 25)

$a^2 + 5a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0;\ -5$ (нули квадр.)

Ответ:

$a < 4$

$a \neq -5;\ 0;\ 3$

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18В от Елены Ильиничны Хажинской

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} |4x| - x - 3 - a = 0 \\ x^2 - x - a \neq 0 \end{cases}$. Рассмотрим два случая.

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - x - 3 - a = 0 \\ x^2 - x - a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a+3}{3} \\ a + 3 \geq 0 \\ a \neq x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3x - 3 \\ a \geq -3 \\ a \neq x^2 - x \end{cases} \Rightarrow 3x - 3 \neq x^2 - x; x^2 - 4x + 3 \neq 0;$$

$x \neq 1; x \neq 3$, следовательно, $a \neq 0, a \neq 6$.

Тогда при $a \in [-3; 0) \cup (0; 6) \cup (6; +\infty)$ данное уравнение имеет один неотрицательный корень $x = \dfrac{a+3}{3}$.

$$2) \begin{cases} x < 0 \\ -4x - x - 3 - a = 0 \\ x^2 - x - a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-a-3}{5} \\ -a - 3 < 0 \\ a \neq x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5x - 3 \\ a > -3 \\ a \neq x^2 - x \end{cases} \Rightarrow -5x - 3 \neq x^2 - x;\ x^2 + 4x + 3 \neq 0$$

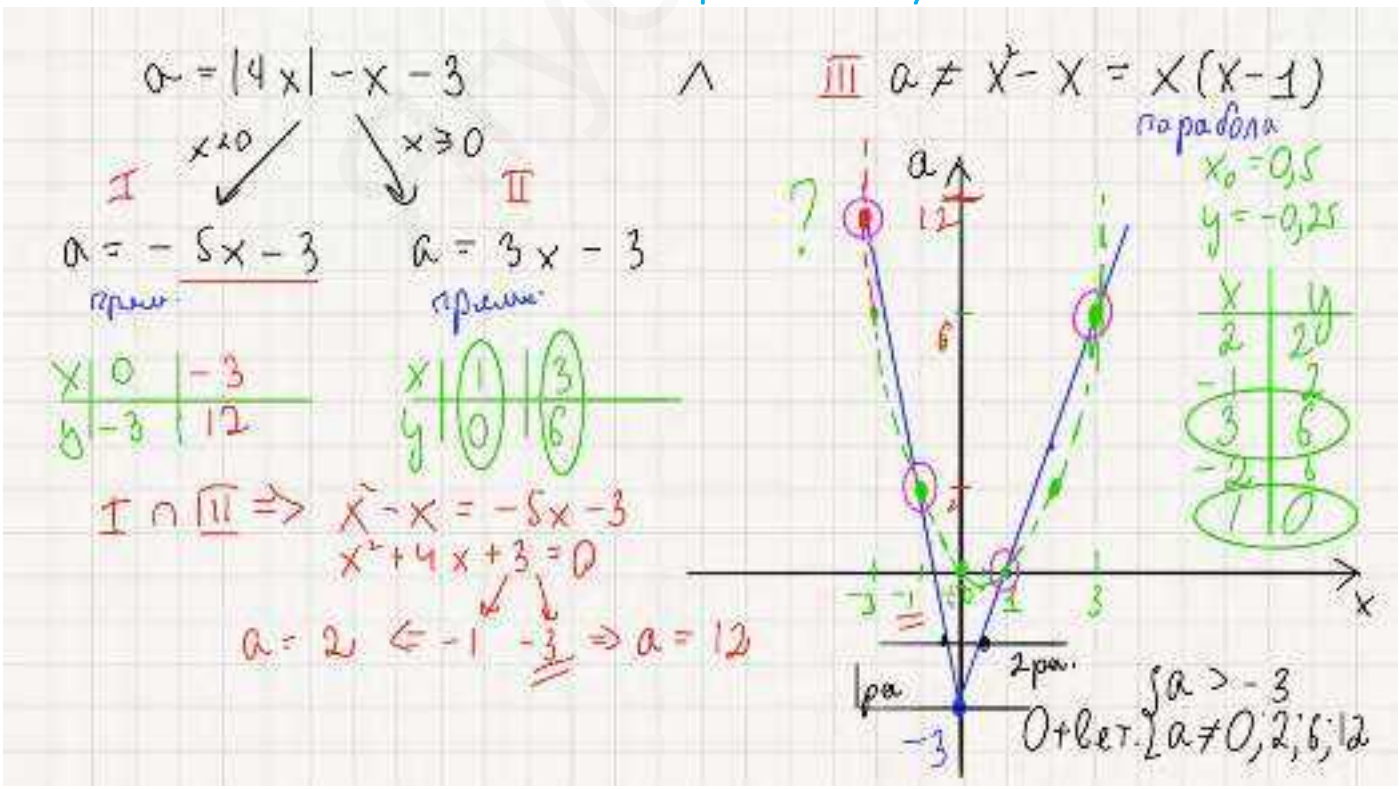
$x \neq -1; x \neq -3$, следовательно, $a \neq 2, a \neq 12$.

Тогда при $a \in (-3; 2) \cup (2; 12) \cup (12; +\infty)$ данное уравнение имеет один отрицательный корень $x = \dfrac{-a-3}{5}$.

Итог: данное уравнение имеет ровно два различных корня при $a \in (-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$.

Ответ: $(-3; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 12) \cup (12; +\infty)$.

18В от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18С от Елены Ильиничны Хажинской

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-2x+a^2-4a=0\ (*) \\ x^2-a\neq 0 \end{cases}$.

Квадратное уравнение $(*)$ имеет два различных корня, когда $\frac{D}{4}=1-a^2+4a>0$, т. е.

$a^2-4a-1<0;\ a\in(2-\sqrt{5};2+\sqrt{5})$.

$a\neq x^2$.

Если $a=x^2$, то $x^2-2x+x^4-4x^2\neq 0;\ x^4-3x^2-2x\neq 0;\ x(x^3-3x-2)\neq 0;\ x(x+1)^2(x-2)\neq 0$

$x\neq 0, x\neq -1, x\neq 2$. Тогда $a\neq 0, a\neq 1, a\neq 4$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

$a\in(2-\sqrt{5};0)\cup(0;1)\cup(1;4)\cup(4;2+\sqrt{5})$

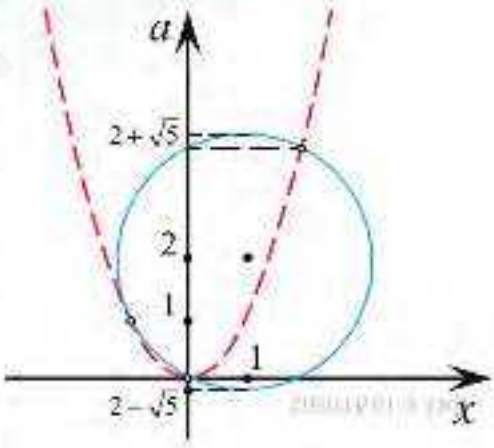
Ответ: $(2-\sqrt{5};0)\cup(0;1)\cup(1;4)\cup(4;2+\sqrt{5})$

18С от Решу ЕГЭ

В системе координат xOa изобразим окружность, задаваемую уравнением $(x-1)^2+(a-2)^2=5$, все точки которой обращают числитель дроби в нуль, и параболу $a=x^2$, точки которой соответствуют нулям знаменателя.

Подставим второе уравнение в первое и решим полученное уравнение на x. Тем самым, найдем точки пересечения окружности и параболы: $(0;0)$, $(2;4)$ и $(-1;1)$ — точка касания.

Итак, заданное уравнение имеет ровно два решения, когда $2-\sqrt{5}<a<2+\sqrt{5}$, $a\neq 0$, $a\neq 1$, $a\neq 4$.



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18D от Елены Ильиничны Хажинской

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 3x - 2a = 0 \ (*) \\ x - a^2 \neq 0 \end{cases}$

Квадратное уравнение $(*)$ имеет два различных корня, когда $D = 9 + 8a > 0$, т.е. $a > -\frac{9}{8}$

$x \neq a^2$.

Если $x = a^2$, то $a^4 - 3a^2 - 2a \neq 0$; $a(a^3 - 3a - 2) \neq 0$; $a(a+1)^2(a-2) \neq 0$

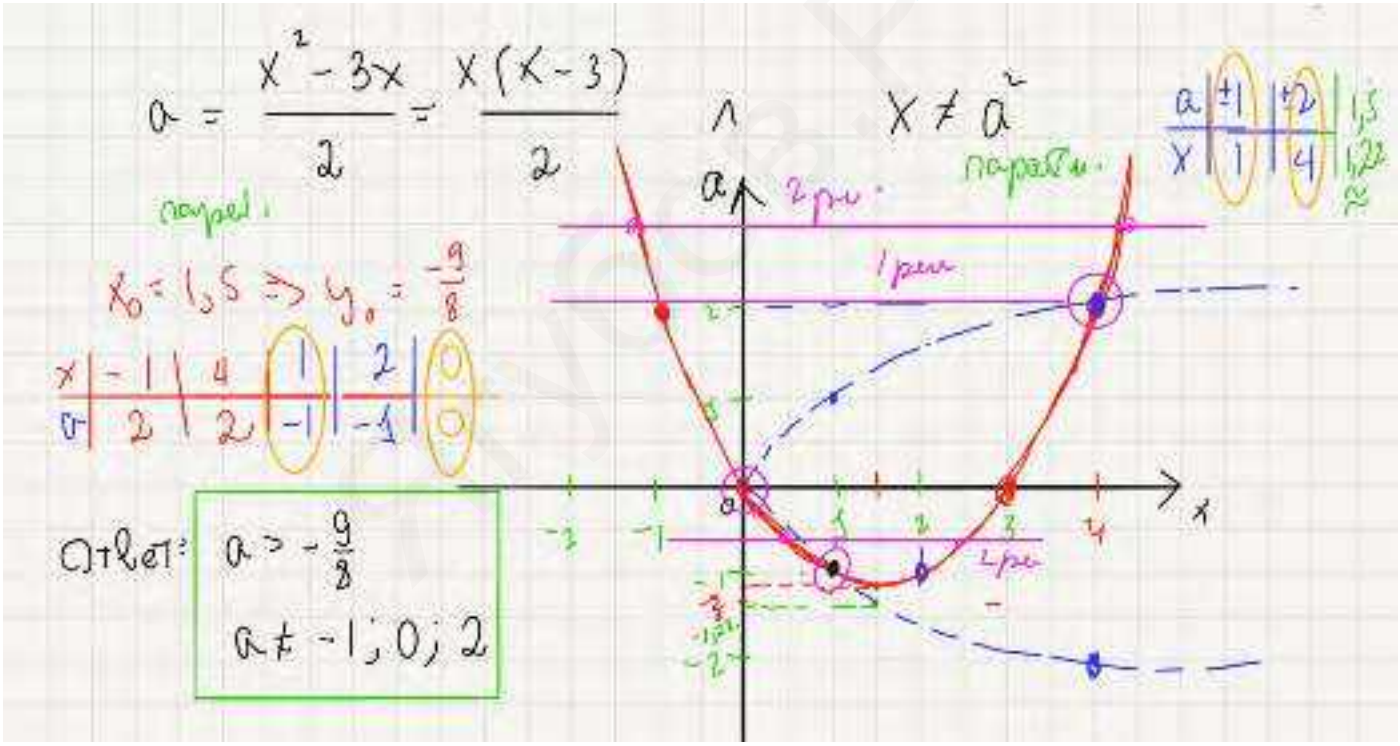
$a \neq 0, a \neq -1, a \neq 2$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

$a \in \left(-\frac{9}{8}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

Ответ: $\left(-\frac{9}{8}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

18D от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18E от Елены Ильиничны Хажинской

Решение.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2+2x-a=0\ (*) \\ x^2-2x+a^2-8a\neq 0 \end{cases}$

Квадратное уравнение $(*)$ имеет два различных корня, когда $\frac{D}{4}=1+a>0$, т. е. $a>-1$

Из уравнения $(*)$ $a=x^2+2x$; $x^2-2x+a^2-8a\neq 0 \Rightarrow x^2-2x+(x^2+2x)^2-8(x^2+2x)\neq 0$,

т. е. $x(x-2)+x^2(x+2)^2-8x(x+2)\neq 0$; $x(x-2)+x(x+2)(x^2+2x-8)\neq 0$;

$x(x-2)+x(x+2)(x-2)(x+4)\neq 0$; $x(x-2)(1+x^2+6x+8)\neq 0$; $x(x-2)(x+3)^2\neq 0$, откуда

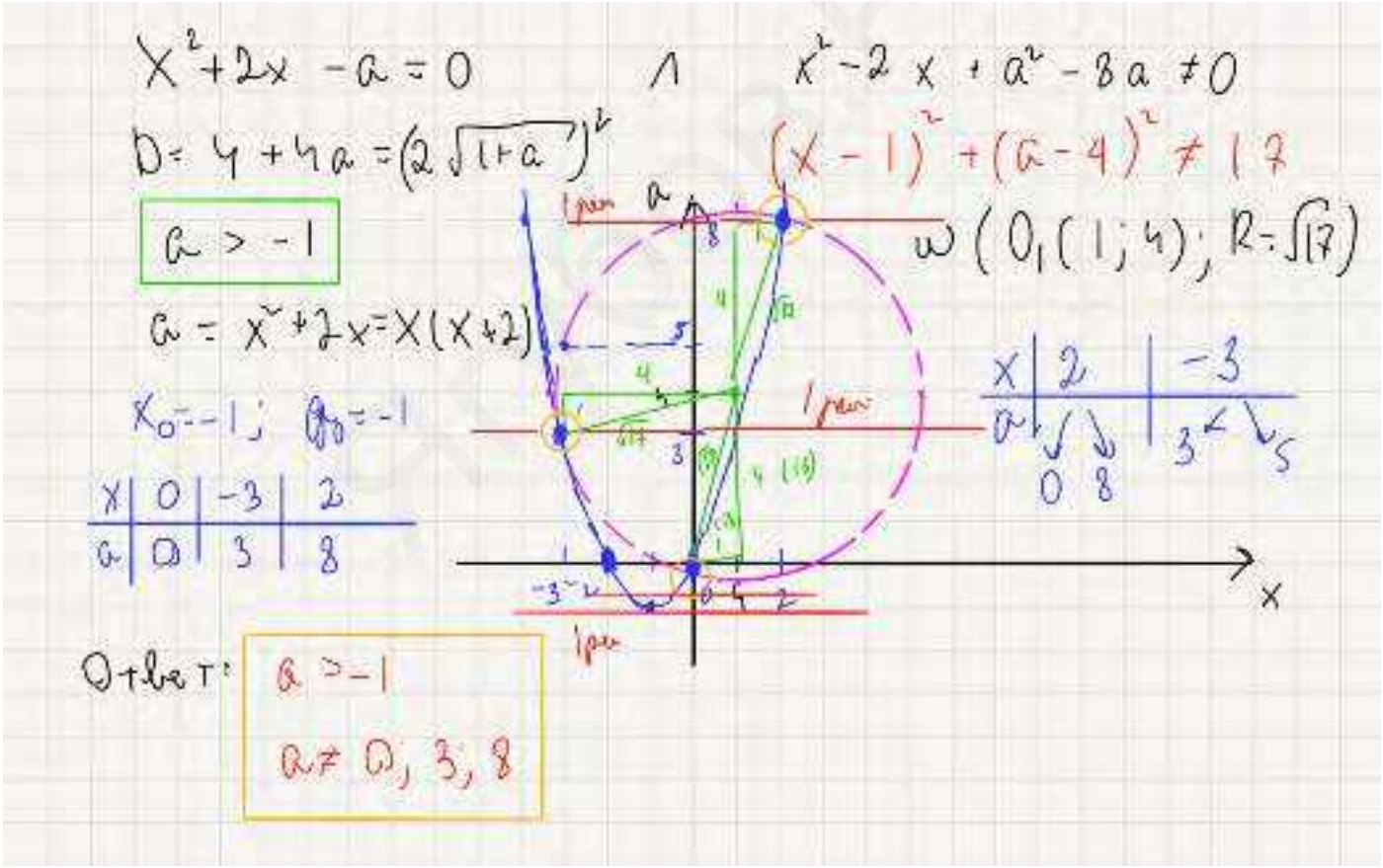
$x\neq 0; x\neq 2; x\neq -3$. Тогда $a\neq 0, a\neq 8, a\neq 3$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

$a\in(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$

Ответ: $(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$

18E от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18F от Елены Ильиничны Хажинской

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} |4x-15|+2a-15=0\ (*) \\ x^2-10x+a^2\neq 0 \end{cases}$

Уравнение $(*)\ |4x-15|=15-2a$ имеет два различных корня, когда $15-2a>0$, т.е. $a<7{,}5$.

При $a<7{,}5$ $\left[\begin{array}{l} 4x-15=15-2a \\ 4x-15=2a-15 \end{array}\right.$, откуда $\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{15-a}{2} \\ x_2=\dfrac{a}{2} \end{array}\right.$.

Если $x=\dfrac{15-a}{2}$, то $\left(\dfrac{15-a}{2}\right)^2-10\cdot\left(\dfrac{15-a}{2}\right)+a^2\neq 0$, т.е. $a^2-2a-15\neq 0$, откуда $a\neq 5, a\neq -3$

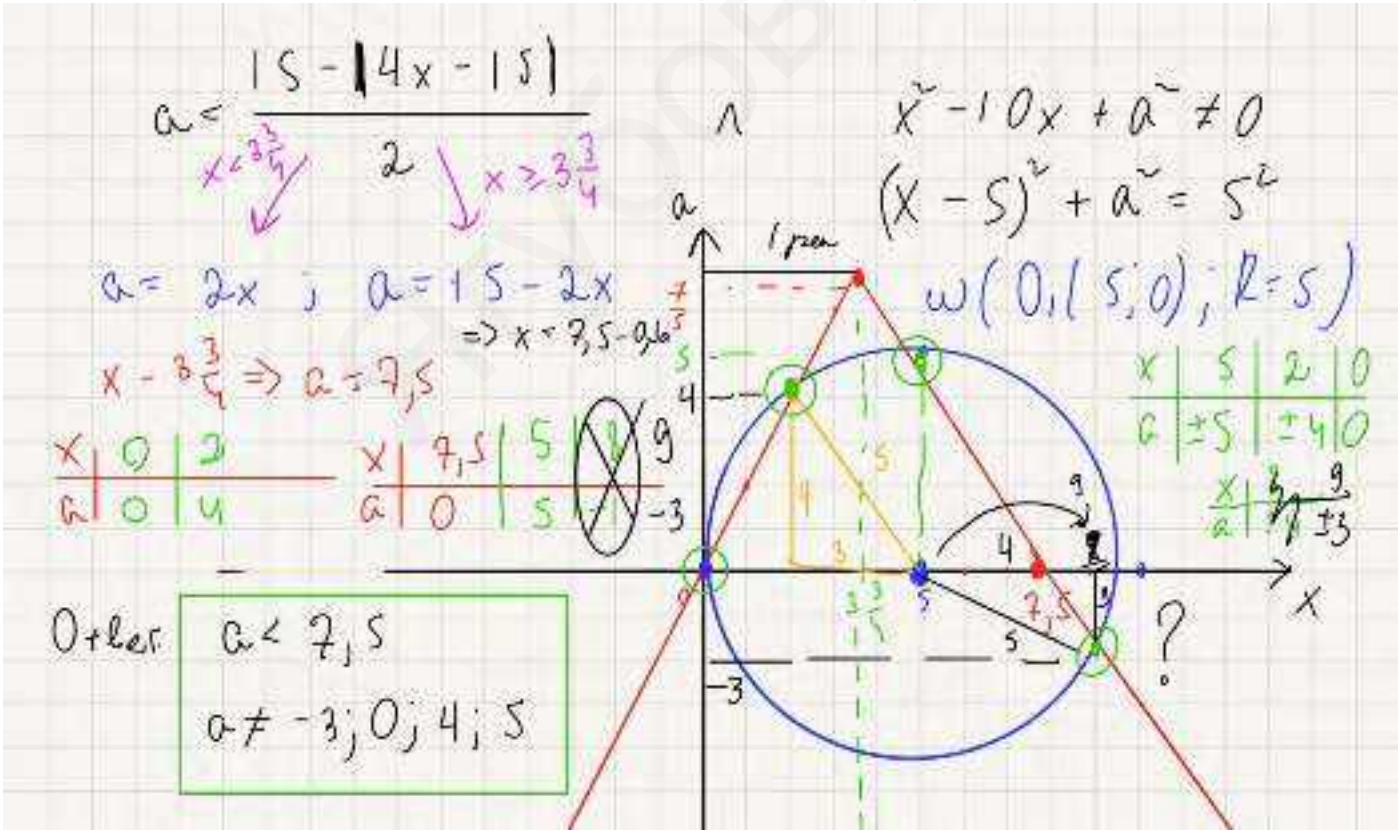
Если $x=\dfrac{a}{2}$, то $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-10\cdot\left(\dfrac{a}{2}\right)+a^2\neq 0$, т.е. $5a^2-20a\neq 0$, $a(a-4)\neq 0$, откуда $a\neq 0, a\neq 4$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

$a\in(-\infty;-3)\cup(-3;0)\cup(0;4)\cup(4;5)\cup(5;7{,}5)$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(-3;0)\cup(0;4)\cup(4;5)\cup(5;7{,}5)$

18F от Романа Борисовича Ягубова



Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18G от Людмилы Скрипка

18.6 $a-?$ 2 различных корня

$$\frac{x^2-6x+a^2+2a}{2x^2-ax-a^2}=0$$

$$\begin{cases} x^2-6x+a^2+2a=0 & (1) \\ 2x^2-ax-a^2\neq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x^2-6x+9+a^2+2a+1=10$

$(x-3)^2+(a+1)^2=10$

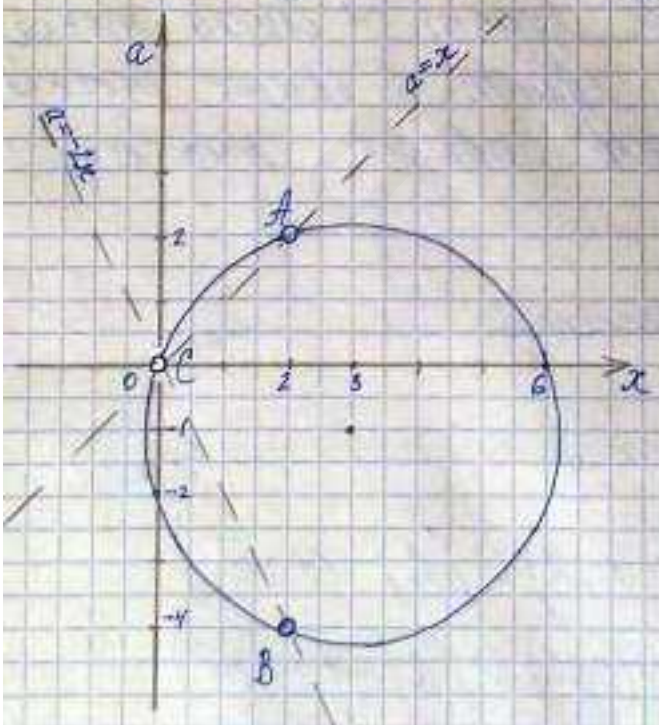
это уравнение в плоскости xOa задаёт множество точек окружности с центром $(3;-1)$; $R=\sqrt{10}$

(2) $2x^2-ax-a^2\neq 0$.

Найдем те точки $(x;a)$, в которых $2x^2-ax-a^2=0$, и удалим их с окружности

$a^2+ax-2x^2=0$

$a=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+8x^2}}{2}$; $a=\frac{-x+3x}{2}$; $\left[\begin{array}{l} a=-2x \\ a=x \end{array}\right.$.



Точки A, B, C выколоты, найдем их координаты.

1) $a=-2x$ подставим в (1)

$x=\frac{-a}{2}$

$\frac{a^2}{4}+3a+a^2+2a=0$,

$\frac{5}{4}a^2+5a=0$, $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-4 \end{array}\right.$

2) $a=x$ подставим в (1)

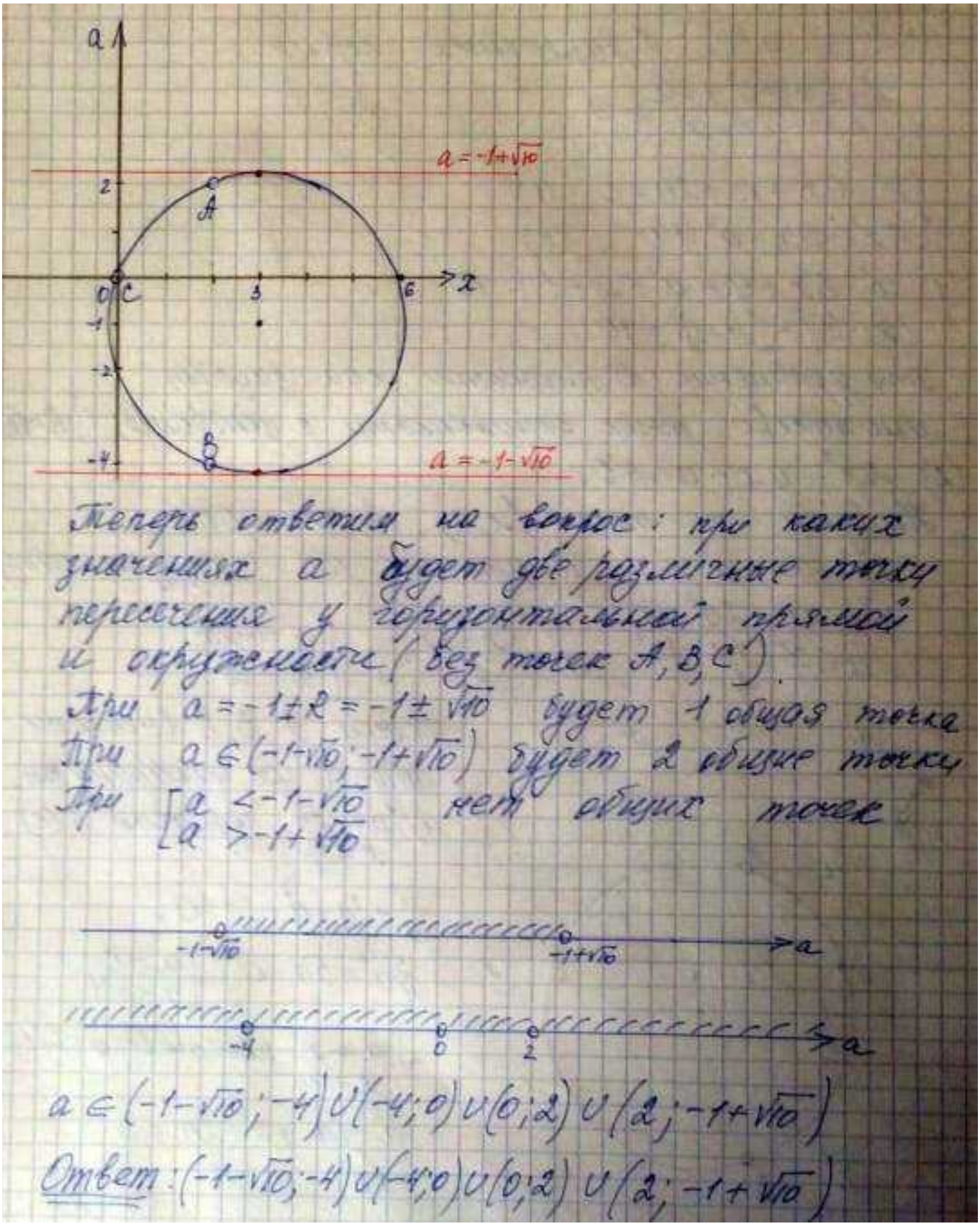
$x=a$

$a^2-6a+a^2+2a=0$

$2a^2-4a=0$, $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$

$A(2;2)$ $B(2;-4)$; $C(0;0)$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях



Теперь ответим на вопрос: при каких значениях a будет две различные точки пересечения у горизонтальной прямой и окружности (без точек A, B, C).

При $a=-1\pm 2=-1\pm\sqrt{10}$ будет 1 общая точка

При $a\in(-1-\sqrt{10};-1+\sqrt{10})$ будет 2 общие точки

При $\left[\begin{array}{l} a<-1-\sqrt{10} \\ a>-1+\sqrt{10} \end{array}\right.$ нет общих точек

$a\in(-1-\sqrt{10};-4)\cup(-4;0)\cup(0;2)\cup(2;-1+\sqrt{10})$

Ответ: $(-1-\sqrt{10};-4)\cup(-4;0)\cup(0;2)\cup(2;-1+\sqrt{10})$

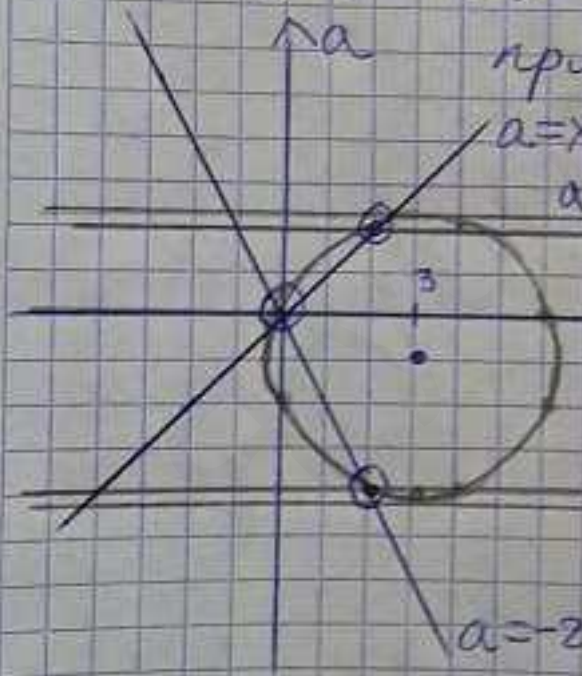
Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18G от Златы

$$\frac{x^2-6x+a^2+2a}{2x^2-ax-a^2}=0$$

$$\begin{cases} x^2-6x+a^2+2a=0 \\ 2x^2-ax-a^2\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2+(a+1)^2=10 \leftarrow \text{график окружность} \\ 2(x-a)\cdot\left(x+\frac{a}{2}\right)\neq 0 \leftarrow \text{график: все точки плоскости, кроме прямых } a=x \text{ и } a=-2x \end{cases}$$



Найдём точки пересечения окружности с прямой $a=x$

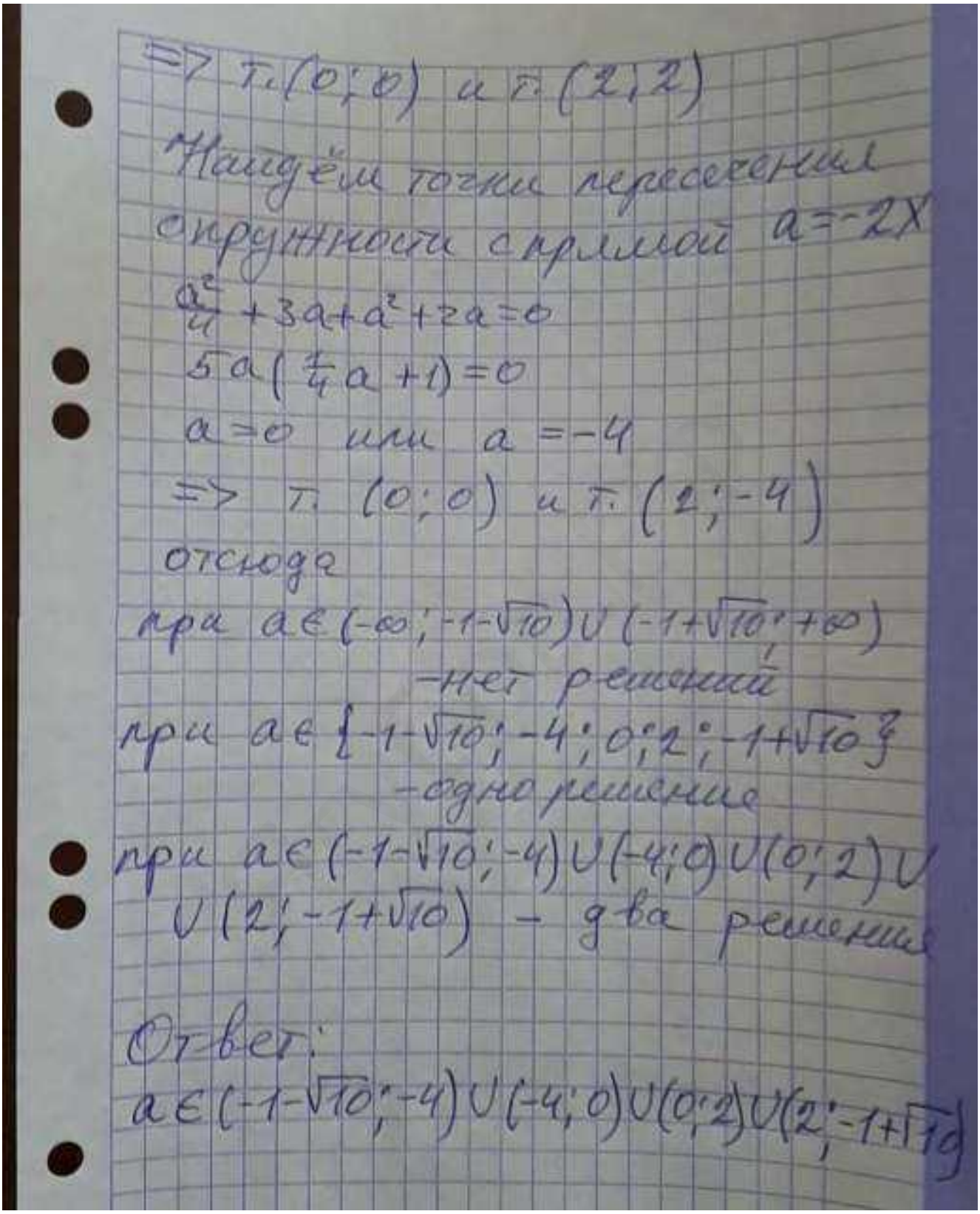
$2a^2-4a=0$

$2a(a-2)=0$

$a=0$ или $a=2$

$x=0$ $\quad$ $x=2$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях



$\Rightarrow$ т. $(0;0)$ и т. $(2;2)$

Найдём точки пересечения окружности с прямой $a=-2x$

$\frac{a^2}{4}+3a+a^2+2a=0$

$5a\left(\frac{1}{4}a+1\right)=0$

$a=0$ или $a=-4$

$\Rightarrow$ т. $(0;0)$ и т. $(2;-4)$

отсюда

при $a\in(-\infty;-1-\sqrt{10})\cup(-1+\sqrt{10};+\infty)$

– нет решений

при $a\in\{-1-\sqrt{10};-4;0;2;-1+\sqrt{10}\}$

– одно решение

при $a\in(-1-\sqrt{10};-4)\cup(-4;0)\cup(0;2)\cup$

$\cup(2;-1+\sqrt{10})$ – два решения

Ответ:

$a\in(-1-\sqrt{10};-4)\cup(-4;0)\cup(0;2)\cup(2;-1+\sqrt{10})$

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

18H от Елены Ильиничны Хажинской

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-6x+a^2-4a}{x^2-a^2}=0$ имеет ровно два различных корня?

Решение.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-6x+a^2-4a=0\ (*) \\ x^2-a^2\neq 0 \end{cases}$.

Квадратное уравнение$(*)$имеет два различных корня, когда $\frac{D}{4}=9-a^2+4a>0$, т. е.

$a^2-4a-9<0; a\in\left(2-\sqrt{13};2+\sqrt{13}\right)$.

$x^2\neq a^2$, т. е. $x\neq a, x\neq -a$.

Если $x=a$, то $a^2-6a+a^2-4a\neq 0; 2a^2-10a\neq 0; a\neq 0; a\neq 5$.

Если $x=-a$, то $a^2+6a+a^2-4a\neq 0; 2a^2+2a\neq 0; a\neq 0; a\neq -1$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

$a\in\left(2-\sqrt{13};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;5)\cup\left(5;2+\sqrt{13}\right)$

Ответ: $\left(2-\sqrt{13};-1\right)\cup(-1;0)\cup(0;5)\cup\left(5;2+\sqrt{13}\right)$

18I от Елены Ильиничны Хажинской

18.I.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-2x+a^2-6a}{x^2+x-a}=0$ имеет ровно два различных корня.

Решение.

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2-2x+a^2-6a=0\ (*) \\ x^2+x-a\neq 0 \end{cases}$

Квадратное уравнение$(*)$имеет два различных корня, когда $\frac{D}{4}=1-a^2+6a>0$, т. е.

$a^2-6a-1<0; a\in\left(3-\sqrt{10};3+\sqrt{10}\right)$.

$x^2+x-a\neq 0$ т. е. $a\neq x^2+x$. Тогда при $a=x^2+x$ имеем $x^2-2x+(x^2+x)^2-6(x^2+x)\neq 0$.

$x^4+2x^3-4x^2-8x\neq 0; x(x^3+2x^2-4x-8)\neq 0; x\left(x^2(x+2)-4(x+2)\right)\neq 0;$

$x(x+2)^2(x-2)\neq 0; x\neq 0, x\neq -2, x\neq 2$.

Если $x\neq 0$, то $a\neq 0$; если $x\neq -2$, то $a\neq 2$; если $x\neq 2$, то $a\neq 6$.

Следовательно, данное уравнение имеет ровно два различных корня при

$a\in\left(3-\sqrt{10};0\right)\cup(0;2)\cup(2;6)\cup\left(6;3+\sqrt{10}\right)$.

Ответ: $\left(3-\sqrt{10};0\right)\cup(0;2)\cup(2;6)\cup\left(6;3+\sqrt{10}\right)$.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Задание 19

19А от Суханова Олега Владимировича

а) Составим таблицу по условию задачи:

<1000	=1000	>1000	Всего
x	y	z	x+y+z=65
982x	1000y	1024z	982x+1000y+1024z=65000

Решая систему, получим: $18x - 24z = 0 \Rightarrow 3x = 4z \Rightarrow x = \frac{4}{3}z > z$. Противоречие.

Ответ: Нет

б) $3x=4z \Rightarrow x = 4t; z = 3t; t \geq 0$ где t – целое число.

$x + y + z = 4t + y + 3t = 7t + y = 65 \Rightarrow y = 65 - 7t \geq 0 \Rightarrow t \leq 9$ (*) y=13,

тогда 7t=52 – не имеет решений в целых числах.

Ответ: Нет.

в) Очевидно, что самый легкий овощ находится в группе «<1000». В этой группе всего x=4t овощей. Их общий вес равен: 982x=982*4t грамм Вес каждого овоща этой группы не превышает 999 грамм.

Вес всех овощей, за исключением самого легкого, будет не более 999(x-1) = 999(4t-1).

Тогда вес самого легкого овоща равен:

$S \geq 982 \cdot 4t - 999(4t - 1) = 999 - 68t \geq 999 - 68 \cdot 9 = 387$ грамм

Равенство достижимо при t=9 (смотри (*)).

Тогда x=4t=36, z=3t=27, y=2.

Строим пример: 35 овощей по 999 грамм, один -387 грамм, 2 овоща по 1000 грамм и 27 овощей по 1024 грамма. Ответ: 387 грамм

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

19В от Суханова Олега Владимировича

а) Пусть С – сумма чисел на синих карточках, а К - сумма чисел на красных карточках.

По условию задачи имеем:

$$\begin{cases} C + K = 800 \\ 2C + K = 1560 \end{cases}$$

. Решая систему, получим, что С=760, К=40

Синих карточек 10, тогда красных – 40. Поскольку числа на красных карточках могут быть одинаковыми, то данный случай возможен, если на всех красных карточках написаны единицы, а на синих написаны: 2;3;4;5;6;7;8;9;10;706

Ответ: Да

б) 10 красных карточек, значит 40 синих.

Максимальное число, написанное на красной карточке не менее 4, иначе сумма всех чисел на красных карточках была бы меньше 40. Тогда все числа на синих карточках не могут быть меньше 5.

Минимальная сумма 40 различных чисел , каждое из которых не меньше 5, равна

5+6+7+...+43+44=980>760. Противоречие.

Ответ: Нет

в) в предыдущем пункте показано, что 40 синих карточек быть не может.

Если 39 синих карточек, то красных - 11, максимальное число на красной карточке не меньше 4. Сумма чисел на синих карточках не менее: 5+6+...+43=926>760.

Аналогично рассуждая, получим, что не может быть ни 38, ни 37 синих карточек.

Если синих карточек 36, то красных – 14 , максимальное число на красной карточке не меньше 3. Сумма чисел на синих карточках не менее: 4+ 5+6+...+39=774>760.

Случай с 35 синими карточками возможен, например:

На 15 красных карточках написаны : 1; 1; 2; 3;3; ... ; 3

На синих карточках написаны числа: 4; 5; 6; ... ; 36; 37; 63 Ответ: 35

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

19С от Суханова Олега Владимировича

а) составим последовательность: x, 2x,4x,8x.

Поскольку 8x-98=x имеет решение x=14, то такая последовательность существует, например: 28, 56, 112, 14, 28, ...,56, 112; 224

Ответ: Да

б) Поскольку 75 – нечетное число, то оно могло быть получено только путем вычитания 98. Тогда $a_{99} = 75 + 98 = 173$ -нечетное число.

Рассуждая аналогично, получаем, что все числа последовательности нечетные.

Значит, применялась только операция вычитания. В этом случае:

$a_1 = 75 + 99 \cdot 98 = 9777$

Ответ: 9777

в) В пункте а) была получена последовательность, где 112 – максимальное число.

Для этого из последовательности в пункте а) надо убрать число 224 и добавить 28.

Покажем, что это и есть минимальное значение.

Очевидно, что максимальное число последовательности могло быть получено при помощи операции умножения на 2, значит – это число четное, причем оно должно быть больше 98, иначе операция вычитания невозможна.

Исследуем все варианты:

$110 \to 12 \to 24 \to 48 \to 96 \to 192.$ Но $192 > 112$

$108 \to 10 \to 20 \to 40 \to 80 \to 160$

$106 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128$

$104 \to 6 \to 12 \to 24 \to 48 \to 96 \to 192$

$102 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128$

$100 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 64 \to 128$

Видно, что во всех случаях максимальное число в последовательности превосходит 112. Ответ: 112

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

19D от Суханова Олега Владимировича

Составим таблицу согласно условию задачи:

<100	=100	>100	Всего
x	Y	z	x+y+z=95
73x	100y	115z	73x+100y+115z=9500

а) Решая полученную систему, имеем:

$27x - 15z = 0$ или $9x = 5z \Rightarrow x = \frac{5}{9}z < z$

Ответ: Нет

б) Поскольку $9x = 5z$, то x=5t и z=9t, где t>0.

Тогда $x + y + z = 5t + y + 9t = 14t + y = 95$. Тогда $t \leq 6$. (*)

По условию $0 \leq y < 10 \Rightarrow 85 < 14t \leq 95$, но среди чисел от 86 до 95 нет ни одного числа, делящегося на 14.

Ответ: Нет

в) Очевидно, что самый тяжелый фрукт находится в группе (>100).

Вес всех фруктов этой группы равен 115z=115*9t=1035t

Количество фруктов в этой группе: z=9t

Минимальный вес фрукта в этой группе равен 101.

Оценим вес самого тяжелого фрукта:

$S \leq 1035t - 101(9t - 1) = 101 + 126t \leq 126 \cdot 6 + 101 = 857.$

Равенство достигается, если t=6. Тогда x=5t=30, z=9t=54, y=95-14t=11

Строим пример:

73; ...; 73 – 30 штук

100; ... ; 100 – 11 штук

101; ...; 101 -53 штуки + 857

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

19E от Суханова Олега Владимировича

В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6.

При этом, каждый день (кроме первого) сумма чисел , записанных на доску в этот день больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.

А) известно, что сумма чисел, записанных в первый день , равна 7. Может ли n быть больше 6?

Б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 2, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 2,5?

В) Известно, что n=6. Какое наименьшее количество чисел могло быть записано за все эти дни?

Решение:

А) В каждый следующий день количество чисел уменьшается хотя бы на 1, а их сумма увеличивается , как минимум, на 1.

Таким образом: на 6-й день останется не более одного числа. Значит- в первый день было записано не менее 6 чисел, сумма которых не меньше 6. А на шестой день, сумма должна быть не менее 6+5=11. Это противоречит условию, что каждое число меньше 6.

Ответ: Нет

Б) Легко строится пример для n=3:

1 день: 11 чисел «1»

2 день: 10 чисел «4»

3 день: 9 чисел «5»

Ответ: Да

В) На шестой день должно остаться хотя бы одно число, значит – в первый день было записано не менее 6 чисел, сумма которых не менее 6. Тогда : сумма чисел, записанных на доске в 6-й день не менее 6+5=11.

По условию задачи, все числа меньше 6. В этом случае, на доске в шестой день могло быть записано не менее 3 чисел. Но тогда в первый день было записано не менее 8 чисел.

Покажем, что это возможно:

1 день – 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1

2 день – 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 3

3 день – 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 5

4 день – 1 , 1 , 1 , 3 , 5

5 день – 1 , 1 , 5 , 5

6 день – 3 , 5 , 5

Ответ: Да

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

19Е от ФИПИ

а) Заметим, что в первый день на доску было записано не более 7 чисел. Значит, если $n>6$, то в седьмой день на доску было записано одно число. Но это невозможно, поскольку это число должно быть больше суммы чисел, записанных в первый день, равной 7.

б) Пусть $n=3$, в первый день на доску записали число 1 и шесть чисел 2, во второй день — шесть чисел 3, а в третий день — пять чисел 4. Тогда сумма чисел в первый день равна 13, во второй — 18, а в третий — 20. Среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, равно $1\frac{6}{7}<2$, а среднее арифметическое всех записанных чисел равно $2\frac{5}{6}>2{,}5$.

в) Заметим, что в шестой день на доску было записано хотя бы одно число. Предположим, что в шестой день на доску было записано не больше двух чисел. Значит, в первый день на доску было записано не менее 6 чисел, и их сумма была не меньше 6. Но это невозможно, поскольку в шестой день сумма записанных на доску чисел должна быть не меньше 11, а сумма двух чисел, каждое из которых меньше 6, не может быть больше 10.

Таким образом, в шестой день на доску было записано хотя бы три числа. Следовательно, в пятый день было записано не менее четырёх чисел, в четвёртый день — не менее пяти, в третий — не менее шести, во второй — не менее семи, а в первый — не менее восьми. Значит, суммарно чисел было не меньше 33.

Покажем, что могло быть записано 33 числа, удовлетворяющих условию задачи. Пусть в первый день были записаны числа 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; во второй — 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3; в третий — 1, 1, 1, 1, 3, 3; в четвёртый — 1, 1, 3, 3, 3; в пятый — 1, 1, 5, 5, в шестой — 4, 4, 5. Тогда суммы записанных за эти дни чисел соответственно равны 8, 9, 10, 11, 12 и 13, то есть числа удовлетворяют условиям задачи.

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

ВИДЕОРАЗБОРЫ ЗАДАНИЙ

Варианты

1. Ягубов Р.Б., Весь задачник [https://youtu.be/W1l0DiCXjDM]
2. Школково [https://youtu.be/ZA8QXgaBXsc]
3. Борис Трушин [https://youtu.be/UUfrLHBRA-w]
4. Wild Mathing [https://youtu.be/N1dcLMBPPL0]
5. Анна Малкова [https://youtu.be/XSA_cqMWL-U]
6. Павел Маслов [https://youtu.be/bBoAoJI2dtE]
7. Ягубов Р.Б., Сразу после экзамена [https://youtu.be/ZSVz0kyRXbs]
8. Математик МГУ [https://youtu.be/2Qn_3v_2lG0]
9. MathEasy [https://youtu.be/0Vtu-sP99qY]
10. Курсы Красноярск [https://youtu.be/mm01foBKLe8]
11. Екатерина Попова [https://youtu.be/UvHEE95DTd8]

Задания 1-12. Видео

1. Анна Малкова [https://youtu.be/QdtdMSv7ohM]
2. Константин Струков [https://youtu.be/rVr8Vg_5nXk]
3. Valery Volkov [https://youtu.be/HAsA6LJA6vI]
4. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/zvCpy6TiDN8]

Задания 13. Видео

1. Анна Малкова [https://youtu.be/QQcHwqbIphU?t=430]
2. Valery Volkov [https://youtu.be/Ot2A25xo80c]
3. Математикс [https://youtu.be/MQ2nqx1rYvQ]
4. mathschool online [https://youtu.be/9P6VngXtRM8]
5. mathschool online [https://youtu.be/V-eCvIR7vmQ]
6. ЕГЭ и ОГЭ по математике [https://youtu.be/ExadoRisNVY]
7. ЕГЭ и ОГЭ по математике [https://youtu.be/zKTcljFqxoQ]
8. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/GGSew0MLAl0]
9. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/1Ns-mvGSRng]
10. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/sPuG9OS7sNk]
11. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/JFWmCk0MmKA]

Задания 14. Видео

1. Анна Малкова [https://youtu.be/_BaPS3Ofzec]
2. mathschool online [https://youtu.be/KD1nDV0J-gc]

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

3. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/Czxe59MhlTs]
4. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/KQTtMq_7GmQ]
5. Виктор Шеховцов [https://youtu.be/a616xBnanZg]
6. Математическая школа ЕГЭ [https://youtu.be/fmqKK2kPqDc]
7. Константин Струков [https://youtu.be/FmnEOUeYYDk]

Задания 15. Видео

1. Valery Volkov [https://youtu.be/Cbs9Ma2DVlY]
2. lomonosovclub.com [https://youtu.be/hKisC3QHWGo]
3. Математикс [https://youtu.be/ZgSPuNl1kjc]
4. mathschool online [https://youtu.be/jVZMO217yxI]
5. ЕГЭ и ОГЭ по математике [https://youtu.be/pN4Zg-QCkG8]
6. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/-1wlTN1f5oQ?t=12]
7. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/-1wlTN1f5oQ?t=12]
8. ТопТопТВ [https://youtu.be/t0g5btEhUOY]
9. Математическая школа ЕГЭ [https://youtu.be/kSNxDrV-JeI?t=19]
10. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/ZLuip-PkquY]
11. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/tZm8LumshMM]
12. Константин Струков [https://youtu.be/MBr_kwk15VY]
13. Diana Ermakova [https://youtu.be/6VSOeAe0uAg]

Задания 16. Видео

14. Valery Volkov [https://youtu.be/-6P8hERtR0E?t=20]
15. mathschool online [https://youtu.be/4TJyNb5sESA]
16. Математическая школа ЕГЭ [https://youtu.be/nMkuV_tJXYY?t=49]
17. Анна Малкова [https://youtu.be/cnQ23hXPKuY?t=44]

Задания 17. Видео

1. Valery Volkov [https://youtu.be/Jkmf8D0SniU]
2. Математикс [https://youtu.be/AAV7KCm5rB0]
3. mathschool online [https://youtu.be/8E-T3PwQdO8]
4. ЕГЭ и ОГЭ по математике [https://youtu.be/RAjN3F5amfI]
5. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/pirAyzym-L8?t=9]
6. Анна Малкова [https://youtu.be/ADSRVDRfmNw?t=53]
7. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/g2yHXsgNdvE]
8. Математическая школа ЕГЭ [https://youtu.be/eJkGopO2Y-c]

Задания 18. Видео

1. Андрей Яковличев [https://youtu.be/bCPe3Sy-6XU]

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

2. Андрей Яковличев [https://youtu.be/EO34_IPoUbY]
3. Андрей Яковличев [https://youtu.be/TNJDoJ122-4]
4. Андрей Яковличев [https://youtu.be/wGcIDOq0GEk]
5. Valery Volkov [https://youtu.be/MFveGaO9cls]
6. Valery Volkov [https://youtu.be/M5DrLmG-Uw**4**]
7. Valery Volkov [https://youtu.be/vtX6cAruSFE]
8. Diana Ermakova [https://youtu.be/-mEJBX1nTSk]
9. Математикс [https://youtu.be/zBH3rBnum4g]
10. Математикс [https://youtu.be/2x9uCrYRCSY]
11. mathschool online [https://youtu.be/Y34s2VpgKC8]
12. ЕГЭ и ОГЭ по математике [https://youtu.be/65LXexAVtU8]
13. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/sQ2XP3iLHLk?t=8]
14. ТопТопТВ [https://youtu.be/-3kcrsB-cb8]
15. Математическая школа ЕГЭ [https://youtu.be/r25e7iF_L7M?t=35]
16. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/7NHZ29DQ14Q]

Задания 19. Видео

1. Виктор Шеховцов [https://youtu.be/sy_y-PWk4ho]
2. mathschool online [https://youtu.be/ojfiOSdFn-E]
3. mrMathlesson Виктор Осипов [https://youtu.be/ZdxyaG-Pk1s]
4. Олег Суханов [https://youtu.be/4GncvXyAr7Y]

СБОРНИКИ ПРОШЛЫХ ЛЕТ

1. ЕГЭ 2019. Основная волна [https://yagubov.ru/ege2019]
2. ЕГЭ 2018. Основная волна [https://yagubov.ru/ege2018]
3. ЕГЭ 2017. Основная волна [https://yagubov.ru/ege2017]

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

СПАСИБО

Ресурсы

1. РЕШУ ЕГЭ [https://math-ege.sdamgia.ru]
2. ALEXLARIN [http://alexlarin.net/ege/2019/290519.html]
3. КОТ И ЛИС [http://kotolis.ru/realegemat2019]
4. ЕГЭ 2019 [https://join.skype.com/e9mBF0X5c5N6]
5. Ягубов.РФ Учителя [https://join.skype.com/n2nsduD5HTa4]
6. Учительская (новая) [https://join.skype.com/btunDqAiJb8O]
7. Учительская (старая) [закрытый сектор]
8. ФИПИ (критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом)
9. ШКОЛКОВО [https://vk.com/wall-118664176_16925]
10. Wild Mathing [https://vk.com/wildmathing]
11. Uchus.online [https://uchus.online/courses/read/3/350/]
12. Виктор Шеховцов [https://youtu.be/sy_y-PWk4ho]
13. Математика 100 баллов [https://vk.com/math_100]
14. Эрик Ковалёв [https://vk.com/kovaleverik]
15. Поступашки [https://vk.com/postypashki]
16. Valery Volkov [https://www.youtube.com/watch?v=HAsA6LJA6vI]
17. 4ЕГЭ [https://4ege.ru/matematika/58024-sbornik-zadaniy-po-matematike-osnovnogo-perioda-ege-2019.html]
18. Виктор Осипов [https://vk.com/mr.mathlesson]

Ягубов.РФ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

Люди

1. МОИ УЧЕНИКИ [ГНАТОВ М., ЗАВЕРСКИЙ М., АРКАДИЙ, АНДРЕЙ]
2. Анисимова Аида Ахнавовна
3. Акбутина Альфия Марсовна
4. Воробьё Галина ***
5. Гущин Дмитрий Дмитриевич
6. Григорьев Кирилл
7. Громова Маргарита ***
8. Дубовицкая Татьяна Николаевна
9. Ермакова Диана Владимировна
10. Иванов Дмитрий Михайлович
11. Ларин Александр Александрович
12. Ликсаков Максим ***
13. Морозова Елена ***
14. Музалевская Ирина ***
15. Некрасова Ольга Александровна
16. Осипов Виктор Андреевич
17. Пронюк Степан Владиславович
18. Рязанов Никита Андреевич
19. Скрипка Людмила
20. Сосновская Галина ***
21. Суханов Олег Владимирович
22. Токарева Надежда Васильевна
23. Хажинская Елена Ильинична
24. Шеховцов Виктор Анатольевич
25. Ягубов Роман Борисович
26. Ягубова Татьяна Дмитриевна
27. Яковлев Андрей ***
28. Яковлечев Андрей ***
29. *** Елена Владимировна
30. *** Екатерина Николаевна
31. *** Злата
32. *** Наталья Юрьевна
33. *** Ольга Николаевна
34. *** Татьяна Вячеславна
35. Maksimus

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

100 БАЛЛОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Подробно об экзамене

Экзамен	МАТП-11, 29.05.2019
ППЭ	[redacted] г. Реутов
Аудитория	[redacted]
Вариант	318
Статус	Активный результат
Задания типа B	++++++++++++ **[12]**
Задания типа C	2(2)2(2)2(2)3(3)3(3)4(4)4(4) **[20]**
Первичный балл	32
Тестовый балл	100
Отметка (результат)	Порог преодолен
Апелляция	нет
Перепроверка по письму Рособрнадзора	нет
Бланки	Бланк регистрации Бланк ответов №1 Бланк ответов №2, лист 1 Бланк ответов №2, лист 2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2 Дополнительный бланк ответов №2

РЕПЕТИТОР ПО МАТЕМАТИКЕ
ЯГУБОВ.РФ
РОМАН БОРИСОВИЧ

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях

СВИДЕТЕЛЬСТВО

ПРИЗЕРА

олимпиады школьников «Шаг в будущее» 2019 г. по математике

(Рег. номер 3701)

Михаил

Поздравляю Вас с победой в олимпиаде! Решением оргкомитета Вы признаны призером среди 11-х классов и награждаетесь дипломом **3–й степени.** На основании решения Ученого совета Вам предоставляется особое право участия в конкурсе при поступлении в МГТУ им. Н.Э. Баумана с максимальным количеством баллов (**100 баллов**) **по математике**.

Для реализации этого права Вам необходимо иметь результаты ЕГЭ по математике – не ниже 75 баллов, по остальным предметам, установленным Правилами приема для поступления на соответствующую специальность, – не ниже минимальных баллов, указанных в Правилах приема.

Будем рады видеть Вас в числе студентов нашего Университета!

Ректор А.А. Александров

Олимпиада школьников “Шаг в будущее”

СВИДЕТЕЛЬСТВО

призера

олимпиады школьников «Шаг в будущее»
по математике

Ягубов
Роман Борисович (ЛП0315)

Поздравляю Вас с победой в олимпиаде школьников «Шаг в будущее» по математике!
Решением оргкомитета олимпиады Вы признаны призером и награждены дипломом **3 –й степени.**

Приемная комиссия предоставляет Вам льготу 2-го порядка – право на участие в общем конкурсе при поступлении в МГТУ им.Н.Э.Баумана в 2012 г. с результатом **100 баллов по математике**.

Будем рады видеть Вас в числе студентов нашего Университета.

Ректор А.А. Александров

Олимпиада школьников “Шаг в будущее”

Разрешается свободное копирование, распространение и использование в образовательных целях