

Решение олимпиадных задач в 7-8 классах

«Решение задач - практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться этому можно, только беря пример с наилучших образцов и постоянно практикуясь. Но помните: если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их».

Д. Пойа

Умение решать задачи, особенно олимпиадные, всегда являлось одним из показателей математической одаренности ученика.

Тем более что сегодня часто по итогам олимпиад оценивают итоги внеклассной и внешкольной работы по математике в школе, районе.

Подготовка учащегося к участию в олимпиаде – труд не одного года. Нужно отметить, что успешно участвовать в предметной олимпиаде может учащийся, знакомый со стандартными приемами решения задач, выходящих за рамки школьного курса. Определенную роль играет и скорость мышления учащегося. Целесообразно начинать подготовку «олимпиадников» в 5-7 классах. Только при таком подходе учащийся, попавший на олимпиаду в 8-9 классах, будет чувствовать себя уверенно: скажется опыт решения нестандартных задач, накопленный за несколько лет.

В ходе проведения занятий обращаю внимание на то, чтобы: занятия проходили в форме живого, непосредственного общения школьников и преподавателя, учитывался индивидуальный подход; обучающиеся овладели умениями общего учебного характера, разнообразными способами деятельности и *приобрели опыт*:

- решения разнообразных задач из различных разделов курса, в том числе задач, требующих поиска пути и способов решения;
- исследовательской деятельности, проведения экспериментов;

- точного, грамотного изложения своих мыслей в устной и письменной речи;

- поиска, систематизации, анализа, классификации информации, использования разнообразных информационных источников.

Необходимо подчеркнуть, что подготовка и проведение занятий – творческий процесс.

Из своего многолетнего опыта работы хочу предложить *несколько советов*:

- не заниматься с учениками одной темой в течение продолжительного промежутка времени. Даже в рамках одного занятия полезно сменить направление деятельности;

- постоянно возвращаться к пройденному материалу. Это можно делать, предлагая задачи на данную тему в устных и письменных олимпиадах и других соревнованиях;

- при разборе темы выделяю несколько основных логических вех и добиваюсь безусловного понимания этих моментов;

- постоянно обращаюсь к нестандартным и «спортивным» формам проведения занятий, не забывая при этом подробно разобрать все предложенные на них задачи. Также использую на занятиях развлекательные и шуточные задачи.

При непосредственной подготовке учащихся к математическим конкурсам и олимпиадам необходимо **акцентировать внимание учащихся на следующих моментах:**

- в качестве одной из задач конкурса любого уровня может быть задача, в условии которой фигурирует год проведения конкурса, олимпиады;

- как правило, в числе конкурсных задач отсутствуют задачи с длительными выкладками, на использование трудно запоминающихся формул, на использование справочных таблиц;

- если в условии требуется указать все возможные способы решения задачи, то от полноты количества указанных способов зависит и количество полученных баллов;

- если в условии задачи фигурирует вопрос «Можно ли...?», то для того чтобы доказать, что «можно» достаточно привести всего один положительный пример, а для того чтобы ответить, что «нельзя», необходимо рассмотреть все возможные случаи, обобщая их в стройное доказательство;

- всегда помнить, что задания составляются компетентными специалистами, и «некорректных формулировок условий задач», как правило, в конкурсных вариантах не встречается, а непонятные и непривычные формулировки как раз и характеризуются категорией нестандартности задачи.

Рекомендации учителю по подготовке учащихся:

- усилить подготовку учащихся по внепрограммному материалу;
- каждому учителю, прежде чем готовить учащегося к конкурсу, олимпиаде по математике, выработать педагогическую систему подготовки;
- использовать возможности кружковой работы, факультативных занятий по математике для подготовки к решению конкурсных, олимпиадных задач;
- отбор задач необходимо начать заблаговременно.

Приведу несколько возможных тем занятий для учащихся 7-8 классов:

1. Упражнения на быстрый счет (5 – 8 кл.).
2. Четность (7 – 9 кл.)
3. Делимость и остатки (7 – 9 кл.).
4. Занимательные задачи на построения (7 – 8 кл.).
5. Геометрические построения с различными чертежными инструментами (7 – 8 кл.).
6. Логические задачи (5 – 8 кл.).
7. Уравнения в целых и натуральных числах (7 – 11 кл.).

8. Текстовые задачи (7 - 9 кл.).
9. Уравнения, неравенства и их системы (7 – 11 кл.).
10. Занимательные комбинаторные задачи (7 – 9 кл.).
11. Планиметрия (7 – 9 кл.).

Проведение олимпиад и подготовка к ним через математические кружки, факультативные занятия и часы для дополнительной работы по математике должны привлекать детей своей индивидуальностью и интересными методами их проведения.

Роль учителя в этом деле огромная. В первую очередь учитель обязан создать благоприятные условия для того, чтобы ученик смог постигать новое в интересующей его науке. С помощью знаний учителя, умением методически правильно поставить перед учеником задачу посильную ученику, он добьется успеха.

Задания для 7 класса

7.1. Имеется 30 бревен, длины которых 3 или 4 метра, а их суммарная длина равна ста метрам. Каким количеством распилов можно распилить все эти бревна на куски длиной 1 метр? (*Каждым распилом пилится ровно одно бревно*).

Ответ: 70.

Решение.

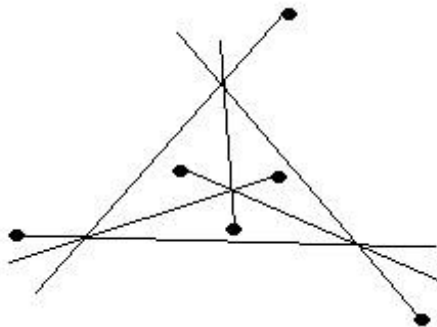
Первый способ. Суммарная длина бревен равна 100 метров. Если бы это было одно бревно, то понадобилось бы 99 распилов. Так как это 30 бревен, то 29 распилов уже сделано. Значит, осталось сделать еще $99 - 29 = 70$ распилов.

Второй способ. Найдем количество бревен каждого вида. Если бы все были трёхметровые, то их суммарная длина была бы равна 90 метров. А так как она равна 100 метров, то всего есть 10 бревен по 4 метра и 20 бревен по 3 метра. Для каждого бревна длиной 4 метра потребуется три распила, а для каждого бревна длиной 3 метра – два распила. Итого: $10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 70$ распилов.

7.2. Нарисуйте шесть лучей так, чтобы они пересекались ровно в четырех точках, по три луча в каждой точке. Отметьте начала лучей жирными точками.

Ответ:

Существуют и другие примеры. В частности, какие-то лучи могут иметь общую вершину или вершина одного луча может лежать на другом.



7.3. Пять подружек Соня, Таня, Лена, Галя и Вика родились в пяти городах: Риге, Пензе, Казани, Белгороде и Москве. Каждая из них любит конфеты, производимые в одном из этих городов. Известно, что никто не любит конфеты, произведенные в родном городе. Соня любит конфеты из Риги. Таня родом из Риги, у нее любимые конфеты из Пензы. Вика любит конфеты из Москвы. Галины любимые конфеты производят в Белгороде. Вика родом из Казани. Уроженка Пензы любит конфеты, сделанные на родине Лены. Кто из подруг родился в Москве?

Ответ: Соня.

Решение. Из условия можно определить, кто какие конфеты любит:

Соня – из Риги;

Таня – из Пензы;

Вика – из Москвы;

Галя – из Белгорода; значит, Лена – из Казани.

Известно, что никто не любит конфеты, произведенные в родном городе. Отметим в таблице это условие, а также условия, что Таня родом из Риги, а Вика родом из Казани.

Так как уроженка Пензы любит конфеты, сделанные на родине Лены, то Лена не из Пензы. Если Лена из Москвы, то уроженка Пензы любит конфеты, сделанные в Москве, то есть из Пензы должна быть Вика. Но Вика из Казани. Значит, Лена из Белгорода. Конфеты из Белгорода любит Галя, значит, Галя из Пензы. Тогда остается, что родом из Москвы – Соня.

	Соня	Таня	Лена	Галя	Вика
Рига	–	+	–	–	–
Пенза		–			–
Казань	–	–	–	–	+
Белгород		–		–	–
Москва		–			–

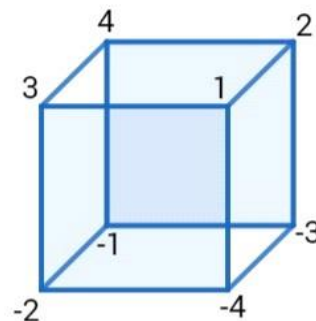
7.4. В каждой вершине куба живёт число, не обязательно положительное. Все восемь чисел различны. Если число равно сумме трёх чисел, живущих в соседних с ним вершинах, то оно счастливо. Какое наибольшее количество счастливых чисел может жить в вершинах куба?

Ответ: 8.

Решение. Легко проверить, что в каждой вершине куба стоит счастливое число.

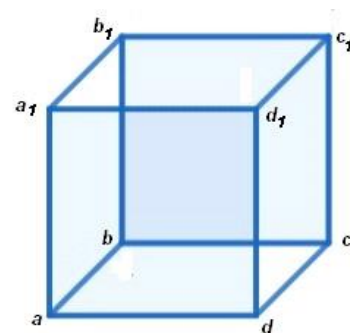
Существуют и другие примеры. Разберёмся, как они устроены (от участников олимпиады этого не требовалось). Обозначим числа, стоящие в вершинах куба (см. рис. 7.5б). Запишем сначала два равенства для противоположных вершин нижнего квадрата: $a = a_1 + b + d$ (1); $c = c_1 + b + d$ (2). Вычитая из равенства (1) равенство (2), получим: $a - c = a_1 - c_1$ (3).

Теперь запишем аналогичные равенства для двух вершин вертикального ребра: $b = b_1 + a + c$ (4); $b_1 = b + a_1 + c_1$ (5). Подставив b_1 из равенства (5) в равенство (4), получим: $a + c = -a_1 - c_1$ (6). Объединив



равенства (3) и (6) в систему, получим, что $a = -c_1$; $c = -a_1$. Таким образом, числа, стоящие в противоположных вершинах куба должны быть противоположными (аналогичные равенства для двух других пар чисел следуют из симметрии куба).

Следовательно, для построения любого примера достаточно выбрать одну из вершин куба и обозначить числа, живущие в соседних с ней вершинах, например, через x , y и z . Для того, чтобы выбранная вершина была счастлива, поселим в неё число $x + y + z$. Требуется только, чтобы модули чисел x , y , z и $x + y + z$ были попарно различными. Тогда останется поселить в противоположных вершинах числа $-x$, $-y$, $-z$ и $-x - y - z$ соответственно. Нетрудно убедиться, что все восемь чисел счастливы.

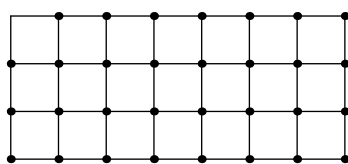


7.5. Поставьте в каждом из шести чисел по одной запятой так, чтобы равенство стало верным: $2016 + 2016 + 2016 + 2016 + 2016 = 46368$.

Ответ: $20,16 + 20,16 + 20,16 + 201,6 + 201,6 = 463,68$ или
 $2,016 + 2,016 + 2,016 + 20,16 + 20,16 = 46,368$.

Задания для 8 класса

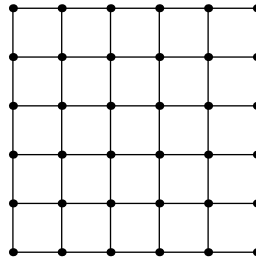
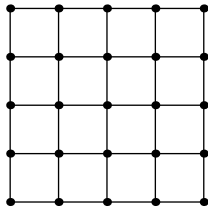
8.1. Карина достала из короба несколько спичек и собрала из них сетку 3×7 из квадратов со стороной в одну спичку, как на рисунке ниже.



Какое минимальное количество спичек ей нужно ещё достать из короба, чтобы из всех спичек она смогла собрать сетку в форме квадрата? (Квадратики сетки опять должны иметь сторону в одну спичку. Лишних спичек остаться не должно.)

Ответ: 8.

Решение. В исходной прямоугольной сетке 52 спички. В квадратной сетке 4×4 всего 40 спичек, а в сетке 5×5 — 60.



Следовательно, нам необходимо добавить 8 спичек.

8.2. По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Докажите, что выражение $1008! \cdot 1009! \cdot 2017! \cdot 2018!$ не является квадратом натурального числа.

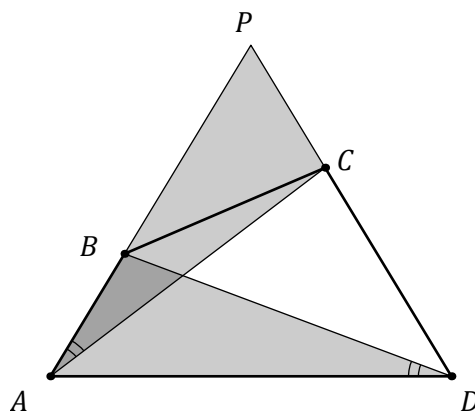
Решение. Заметим, что $1008! \cdot 1009! = (1008!)^2 \cdot 1009$. Аналогично получаем, что $2017! \cdot 2018! = (2017!)^2 \cdot 2018$. Таким образом, $1008! \cdot 1009! \cdot 2017! \cdot 2018! = (1008!)^2 \cdot (2017!)^2 \cdot 1009 \cdot 2018 = (1008! \cdot 2017! \cdot 1009)^2 \cdot 2$.

Последнее выражение не является квадратом, так как имеет вид $2a^2$. Действительно, предположим, что мы имеем равенство $2a^2 = t^2$. Тогда t чётно; пусть $t = 2s$. Подставляя, находим $2a^2 = 4s^2$, то есть наше равенство можно разделить пополам: $a^2 = 2s^2$. Новое равенство аналогично исходному; его точно так же можно разделить пополам, и т.д. Но натуральные числа делить пополам неограниченное число раз нельзя, следовательно, мы пришли к противоречию.

8.3. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAC = \angle BDA$ и $\angle BAD = \angle ADC = 60^\circ$. Найдите длину AD , если известно, что $AB = 14$, $CD = 6$.

Ответ: 20.

Решение. Продлим AB и CD до пересечения в точке P . Поскольку $\angle PAD = \angle ADP = 60^\circ$, то треугольник ADP является равносторонним. Далее заметим, что треугольник APC равен треугольнику DAB , поскольку $AP = AD$, $\angle APC = 60^\circ = \angle DAB$ и $\angle PAC = \angle ADB$ (рис. 2). Поэтому $PC = AB = 14$, и $AD = PD = PC + CD = 14 + 6 = 20$.



8.4. На координатной плоскости построены четыре прямые, уравнения которых имеют вид $y = kx + b$. Все коэффициенты и свободные члены – различные натуральные числа от 1 до 8. Могут ли эти 4 прямые разделить плоскость ровно на 8 частей?

Ответ: *могут.*

Решение. Рассмотрим, например, прямые, заданные уравнениями: $y = 8x + 1$, $y = 7x + 2$, $y = 6x + 3$ и $y = 5x + 4$. Каждая из них проходит через точку (1; 9), поэтому они делят плоскость ровно на 8 частей.

Существуют и другие примеры, в которых все прямые проходят через указанную точку. Это условие выполняется, если в каждом из уравнений $k + b = 9$. В других случаях плоскость разделится на большее количество частей (другой общей точки быть не может и параллельных прямых среди них нет).